

التحفة البهية في الأصول الهندسية

٢

المجلد الثاني

من كتاب التحفة الهندسية في الاصول الهندسية

(مقرر السنة الثانية التجهيزية)

تأليف

حضرة محمد بك عظيم

ناظر مدرسة دار العلوم وقلم الترجمة

(حقوق الطبع محفوظة لنظارة المعارف)

(الطبعة الثانية)

بالمطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحمية

سنة ١٣٠٨

هجريّة



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الجزء الثاني

في مساحات كثيرى الاضلاع والخطوط المناسبة وتشابه الاشكال
والاشكال المنتظمة ومساحة الدائرة

الباب الاول

في مساح كثيرى الاضلاع والخطوط المناسبة وتشابه الاشكال

الفصل الاول

في مساح كثيرى الاضلاع

تعريف

(١٠١) مساحة الشكل هي النسبة الكائنة بين مسطبعه ومسطوح وحدة السطوح

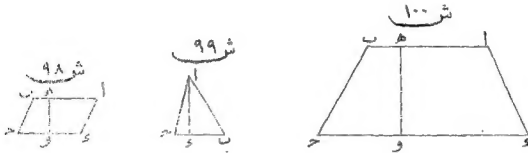
وحدة السطوح المتفق عليها هي المربع الذى ضلعه وحدة الاطوال

(١٠٢) الشكلان المتكافئان هما المتساويان في المساحة

يمكن أن يتكافأ الشكلان مع ما بينهما من التباين الكلى في الصورة فالدائرة مثلا يمكن أن تكافئ

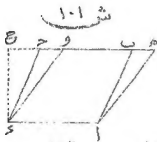
مربعاً أو مستطيلاً أو مثلثاً أو غير ذلك

- (١٠٣) ارتفاع متوازي الاضلاع $أ ب ح د$ (شكل ٩٨) هو العمود $هـ$ هو الذي يقاس به البعد المحصور بين الضلعين المتوازيين $أ ب$ و $ح د$ المعتبرين قاعدتين له
- (١٠٤) ارتفاع المثلث $أ ب ح$ (شكل ٩٩) هو العمود $أ د$ الذي يقاس به البعد المحصور بين الرأس $أ$ والضلع $ب ح$ المقابل لها المعتبر قاعدته
- (١٠٥) ارتفاع شبه المنحرف $أ ب ح د$ (شكل ١٠٠) هو العمود $هـ$ هو الذي يقاس به البعد المحصور بين القاعدتين $أ ب$ و $ح د$ المتوازيتين



دعوى نظرية

- (١٠٦) متوازي الاضلاع المتحدان في القاعدة والارتفاع متكافئان (شكل ١٠١) أعني أن متوازي الاضلاع $أ ب ح د$ و $أ هـ و د$ المتحدان في القاعدة $أ د$ وفي الارتفاع $ح د$ هما متكافئان (وبالضرورة تكون قاعدتاها الاخران $ب ح$ و $هـ و$ على استقامة واحدة) ولبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين $أ هـ ب$ و $د و ح$ فيهما الضلع $أ هـ =$ الضلع $د و$ من خاصية متوازي الاضلاع $أ هـ و د$ والضلع $أ ب =$ الضلع $ح د$ من خاصية متوازي الاضلاع $أ ب ح د$ والضلع $ب هـ =$ الضلع $و د$ لان كل واحد من الضلعين $هـ و$ و $ب ح$ يساوي $أ د$ فاذا طرح من كل منهما البعد $و ب$ يكون $ب هـ = د و$ واذن فالمثلثان متساويان



ثم اذا طرح على التعاقب من الشكل الكلي $أ هـ و د$ المثلثان المذكوران كان الباقيان هما متوازي الاضلاع $أ ب ح د$ و $أ هـ و د$ واذن يكونان متكافئين وهو المطلوب

تبينه - حيث ان أحد متوازي الاضلاع المعلومين يمكن أن يكون مستطيلا فيكون متوازي الاضلاع والمستطيل المتحدان في القاعدة والارتفاع متكافئين

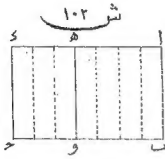
دعوى نظرية

(١٠٧) النسبة بين المستطيلين المتحدى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما (شكل ١٠٢)

أعني ان النسبة بين المستطيلين $أ ب ح د$ و $ا ب و هـ$ المتحدى الارتفاع هو هي كالنسبة بين القاعدتين

$ب و$ و $ح و$

وللبرهنة على ذلك يفرض أولاً أن القاعدتين $ب و$ و $ح و$ متناسبتان وأن النسبة بينهما كالنسبة بين العددين $٧ و ٤$ فإذا قسمت القاعدة الاولى الى سبعة أقسام متساوية



فان الثانية تشتمل ضرورة على أربعة من هذه التقاسيم ثم إذا أقيمت من نقط التقاسيم أعمدة على القاعدة فإنه يتشكل سبعة مستطيلات جزئية متساوية يتركب منها المستطيل $أ ب ح د$ وأما المستطيل $ا ب و هـ$ فإنه يشتمل على أربعة منها وتكون النسبة حينئذ بينهما كالنسبة بين العددين $٧ و ٤$ وعنى النسبة بين القاعدتين $ب و$ و $ح و$

وأما إذا لم تكن القاعدتان متناسبتين فإنه يبرهن على صحة هذه النظرية بعين الطريقة التي استعملت بمرة ٨ من الجزء الاول

نتيجة - حيث ان الضلعين المتجاورين من المستطيل يمكن تسمية أحدهما قاعدة وثانيهما ارتفاعاً لا فرق في ذلك أمكن أن يقال ان النسبة بين المستطيلين المتحدى القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما

دعوى نظرية

(١٠٨) النسبة بين أى مستطيلين تساوى حاصل ضرب النسبة السكائية بين قاعدتيهما في النسبة السكائية بين ارتفاعيهما وذلك اذا رمز بالرمز $م و م$ للمستطيلين وبالرمز $ن و ع$ لقاعدة الاولى وارتفاعه وبالرمز $ق و ع$ لقاعدة الثانى وارتفاعه ثم رمز لمستطيل ثالث بالرمز $م$ ولقاعدته بالرمز $ق$ ولارتفاعه بالرمز $ع$ أى فرض أنه متشبه مع أحد المستطيلين في القاعدة ومع الثانى في الارتفاع

تحصل بمقتضى النظرية السابقة ونتيجتها أن

$$\frac{م}{ق} = \frac{م}{ق} \quad و \quad \frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع}$$

و يضرب هاتين المتساويتين في بعضهما فباطرف تكون حواصل الضرب متساوية ويحدث

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \quad \text{أو} \quad \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

وهو المطلوب

مثال - اذا قيست الابعاد ق و ع و ق و ع بوحدة ثمان وحدات الاطوال وليكن المتر مثلا وكانت مقاديرها هي على الترتيب $\frac{1}{6}$ متر، $\frac{1}{4}$ متر، $\frac{1}{3}$ متر، $\frac{1}{2}$ متر فانه يحدث

$$4 = 2 \times 2 = \frac{4}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{8}{1}$$

اعنى أن المستطيل م يشغل على المستطيل م أربع مرات

دعوى نظرية

(١٠٩) مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه

والبرهنة على ذلك يقال لو فرضنا في النظرية السابقة أن م هو المربع المعتبر وحدة المسطوح وأن كلامنا بعده ق و ع مساو لوحدة الاطوال فان المتساوية السابقة وهى

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

تدل على أن مساحة المستطيل م تساوى حاصل ضرب مقاس قاعدته في مقاس ارتفاعه وهو المطلوب

تنبيه - هذه النظرية لا تكون حقيقية الا اذا كان وحدة المسطوح هو المربع الذى ضلعه وحدة الاطوال وحيث ان النسبة $\frac{4}{5}$ تدل على مقتضى التعريف (١٠١) على مساحة

المستطيل م وان النسبتين $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{5}$ تدلان على تنبج تقدير الطولين ق و ع بوحدة

الاطوال او على نتيجة مقاسهما يمكن أن يعبر عن مساحة المستطيل بهذا القانون $م = ق \times ع$

مثال - اذا فرض أن ضلع المربع المعتبر وحدة هو المتر وقد تربه الاعدان ق و ع وكان

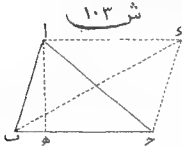
$$\text{مقدارهما } \frac{1}{8} \text{ متر و } \frac{1}{4} \text{ متر تحصل } م = 4 \times 8 = 32 \text{ مترا مربعا}$$

نتيجة ١ - حيث ان متوازي الاضلاع يكافئ المستطيل المتحد معه في القاعدة والارتفاع فتكون مساحته مساوية لحاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه

نتيجة ٢ - حيث ان المربع يمكن اعتباره كانه مستطيل ضلعهما المتجاوران متساويان فاذا كان $د$ دالاعلى مقاس أحد أضلاعه فتكون مساحة المربع مساوية الى $د \times د = د^2$

دعوى نظرية

(١١٠) مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه (شكل ١٠٣)



يعد ذلك من النقطتين $أ$ و $د$ مستقيمان موازيان للضلعين $د$ و $أب$ فيشكل من ذلك متوازي الاضلاع $أب د$ المتحد مع المثلث $أب د$ في القاعدة $د$ وفي الارتفاع $أه$ وحيث كان المثلث نصف متوازي الاضلاع (٥٤ رابعاً) وكانت مساحة متوازي الاضلاع $أب د د = د \times د$ أه فتكون مساحة

المثلث $أب د = د \times د = \frac{1}{2} د \times د$ وهو المطلوب

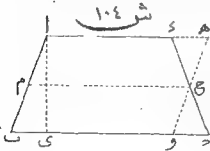
نتيجة ١ - المثلثات المتحدة القاعدة ورؤسها على مستقيم مواز للقاعدة متكافئة لاتحادها في الارتفاع مثل المثلثين $أب د$ و $د ح د$

نتيجة ٢ - حيث ان أى شكل كثير الاضلاع يمكن تقسيمه الى مثلثات بواسطة توصيل أقطاره فيمكن حينئذ تقدير مساحته بواسطة ضم مساح المثلثات المتركب هو منها على بعضها

دعوى نظرية

(١١١) مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب ارتفاعه في نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين

(شكل ١٠٤) وللمبرهن على ذلك



يحول شبه المنحرف الى متوازي أضلاع يكافئه بواسطة أن يمرر من نقطة $ح$ وسط الضلع $د$ المستقيم هو موازيا للضلع $أب$ ويمد حتى يقابل القاعدة $د$ في النقطتين $هـ$ و $و$ فتوازي الاضلاع الحادث $أب وهـ$ يكون مكافئاً لشبه المنحرف $أب د$ المتحد معه في

الارتفاع لان المثلث $د ح د$ يساوى المثلث $هـ د د$ لتساوى الضلع $د$ للضلع $د$ والزاوية

وع \angle للزاوية هـ ع د والزاوية ح د و للزاوية هـ د ع وينتج من تساويهما أن \angle ح د و = هـ د ع
 وحيداً تكون مساحة متوازي الاضلاع أو شبه المنحرف مساوية إلى ب و \times أ ي
 لكن ب و = ب د + ب و ومن جهة أخرى ب و أو أ هـ = أ د + ح د و إذن يكون

$$ب د + ب و = أ د + ح د + ب و = أ د + (ب د + ب و) = (ب د + ب و) \times \frac{1}{2}$$

 وبناء عليه تكون مساحة شبه المنحرف مساوية إلى $\frac{1}{2} \times (ب د + ب و) \times ع$
 وهو المراد

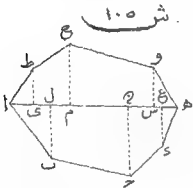
تنبيه ١ - إذا مد من نقطة ح وسط المستقيم د ح المستقيم ع م موازاً للمستقيم أ د
 فتكون نقطة م وسط الضلع أ ب ضرورة ويكون ع م مساوياً إلى ب و أو مساوياً إلى
 $\frac{1}{2} (ب د + ب و)$ وتكون مساحة شبه المنحرف مساوية إلى $ع م \times ع$
 أعني أن مساحة شبه المنحرف تساوي حاصل ضرب المستقيم المتوسط في الارتفاع

تنبيه ٢ - قد ذكرنا بتمرة (١١٠) تنبيه ٢) أنه يمكن أخذ مساحة أى شكل كثير الاضلاع
 بواسطة تقسيمه إلى مثلثات وضم مساحتها على بعضها
 والآن نقول أنه يوجد طريقة أخرى لايجاد مساحة أى
 شكل كثير الاضلاع مستعملة غالباً في الاعمال وهي تقسيم
 الشكل المطلوب أخذ مساحته إلى مثلثات أو أشباه
 منحرف (شكل ١٠٥) قائمة بواسطة انزال جله أعمدة
 من جميع رؤس زواياه على أحد أقطاره أ هـ مثلاً
 وحيث أن مقادير اجزاء القاعدة ومقادير الأعمدة يمكن
 قياسها باغاية الدقة فيتوصل بالطرق المتقدمة إلى أخذ مساحات الاجزاء المختلفة المتركبة منها الشكل
 المذكور ثم تجمع على بعضها

ومع ذلك فلا يشترط مد القطر أ هـ لأنه يمكن الوصول إلى المقصود بواسطة مد مستقيم أ ما أن يقابل
 الشكل المذكور أو لا يقابل ثم ينزل من رؤس زواياه أعمدة عليه وتؤخذ مساحات الاجزاء
 المحصورة بين الأعمدة وبين المستقيم الممدود

دعوى نظرية

(١١٢) المربع المنشأ على مجموع مستقيمين يمكن اعتباره تركيباً من أجزاء ثلاثة وهي



هـ ك = ب ح ووصل ل ك ومثلن نقطة ح المستقيم ح ح موازيا أو تحصل

$$أ ب = ح ح = ع ل = ح ح و$$

$$ب ح = ط ي = ل ك = د$$

وحيث يكون الشكل أ ح د هـ هو المربع المنشأ على أ ح وعلى ح - د والشكل هـ ك ل و هو المربع المنشأ على ح ب وعلى د والشكل ب ي ح ح و ع د ك ل هما مستطيلان متساويان وقاعدة كل واحد منهما ح وارتفاعه د

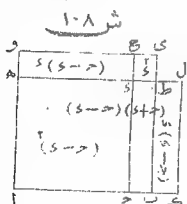
فإذا طرحنا من الشكل الكلي الذي هو عبارة عن مجموع المربعين المستطيلين السابقين كان الباقي مساويا للمربع المنشأ على أ ح وهو المطلوب

تنبيه - إذا دل العدادان ح و د على مقياس الخطين أ ب و ب ح فيكون ح - د دالا على مقياس الفرق بينهما واذن يكون

$$(ح - د)^2 = د^2 + ح^2 - ٢ ح د$$

دعوى نظرية

(١١٤) المستطيل المنشأ على مجموع خطين وقاضلها مساوى الفرق بين مربعيها (شكل ١٠٨)



فإذا كان أ ب = ح أحد الخطين و ب ح = د الخط

الآخر و أ ك = ح + د مجموعهما و أ د = ح - د

فاضلها ثم أنشأ المربع أ ب ي و على أ ب وأخذ

أ هـ = أ ح ورسم المستقيم هـ ل موازيا إلى أ ب

والمستقيمان ك ل و ح ح موازيين إلى أ و حدث

أن أ ح د هـ هو المربع المنشأ على أ ح أو ح - د

وأن الشكل د ط ي ح هو المربع المنشأ على ب ح أو د

وأن الشكلين هـ د ح و و ل ك ط هما مستطيلان متساويان وقاعدة كل واحد منهما

مساوية أ ح أو ح - د وارتفاعهما ب ح = د وحيث لو أسقط المربع د ط ي ح

من المربع أ ب ي و لكان الباقي منه مكافئا للمستطيل أ ك ل هـ وذلك لأن بينهما المستطيل

أ ب ط هـ مشترك والباقي من المستطيل أ ك ل هـ هو المستطيل ب ك ل ط ومن المربع

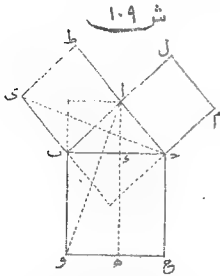
المستطيل د هـ و ح وحيث كان هذان المستطيلان الأخيران متساويين ثبت المطلوب

تنبيه - اذا دل العددين α و β على مقاسي الخطين AB و BC فيكون $\alpha + \beta = \gamma$
 دال على مقاس مجموعهما و $\gamma - \alpha$ دال على مقاس فاضلهما ويكون $(\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha) = \gamma^2 - \alpha^2$

دعوى نظرية

(١١٥) المربع المنشأ على وتر القائمة في المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين منه (شكل ١٠٩) (هذه النظرية منسوبة الى فيثاغورس)

فإذا كان AB مثلثاً قائم الزاوية وأنشأت المربعات CC' و BB' و AA' على أضلاعه الثلاثة وأنزل من الرأس A العمود AD على الوتر BC انقسم المربع CC' الى مستطيلين $CC'DD'$ و $DD'AD'$ ويطلب البرهنة على أن المستطيل $CC'DD'$ يكافئ المربع BB' والمستطيل $DD'AD'$ يكافئ المربع AA'



وللوصول الى ذلك يوصل المستقيمان AD و AD' ثم يتصور دوران المثلث ADC حول نقطة B بمقدار زاوية قائمة فيقع الضلع AC على الضلع AB وتقع نقطة C على نقطة A وكذا ينطبق الضلع BC على الضلع BB' وتقع نقطة C على نقطة B ووحدة المثلث ADC مساوية للمثلث ABD لكن المثلث ADC متحد مع المربع AA' في القاعدة والارتفاع

فيكون نصفه وكذلك المثلث ABD وهو نصف المستطيل $CC'DD'$ لاتحاده معه في القاعدة والارتفاع وبناء عليه يكون المربع AA' مكافئاً للمستطيل $CC'DD'$ وبمثل ذلك يبرهن على تكافئ المربع BB' للمستطيل $DD'AD'$ واذن يكون $BB' = AA' + CC'$ وهو المطلوب

*) ويمكن البرهنة على هذه النظرية بطريقة أخرى (شكل ١١٠)

*) بأن يقال إذا كان AB وتر المثلث القائم الزاوية المفروض وأنشأ عليه المربع AA' بحيث يشمل المثلث ثم أنزل من نقطة C العمود CD على امتداد الضلع AB فالمثلث القائم الزاوية BCD الحادث يكون مساوياً للمثلث ABC لأن فيهما الوتر $BC = BD$ والزاوية

* والزاوية ح ب ج = الزاوية ب أ و لان كل واحد منهما قائم زاوية أ ب و على قائمة



* وحينئذ يكون الضلع ب ج = أ و والضلع

* ح ج = ب و ويكون بناء عليه و ج = أ و - ب و

* ثم اذا أجرى في نقطة د عمل مشابه للأجرى في نقطة ح

* فإن المثلثين الحادتين يكونان متساويين ومتساويين

* للمثلث أ ب و ويكون ح ل = ل ه = ه و = و ج

* = أ و - ب و وبالتالي في الشكل يشاهد أن المربع

* أ ب ح د يتركب من خمسة أجزاء وهي المربع و ج ل ه

* وأربع مثلثات متساوية قاعدة كل واحد منها ب و و ارتفاعه أ و ومساحة كل منها

* مساوية $\frac{1}{4}$ ب و \times أ و

* فإذا رمز بالرموز أ و ب و ح لاضلاع المثلث القائم الزاوية حدث

$$* \quad \text{أ}^2 = (\text{ب} - \text{و})^2 + \text{ج}^2 = \text{ب}^2 - 2\text{ب و} + \text{و}^2 + \text{ج}^2$$

* لكن $(\text{ب} - \text{و})^2 = \text{ب}^2 - 2\text{ب و} + \text{و}^2$ (١١٣) فبالاستعاضة يحدث

$$* \quad \text{أ}^2 = \text{ب}^2 - 2\text{ب و} + \text{و}^2 + \text{ج}^2$$

* وهو المطلوب

نتيجة ١ - يتوصل بالارتباط $\text{أ}^2 = \text{ب}^2 - 2\text{ب و} + \text{و}^2 + \text{ج}^2$ الى ايجاد أى ضلع من أضلاع المثلث

القائم الزاوية متى علم الاثنان الآخران أعني يكون

$$\text{أ}^2 = \text{ب}^2 - 2\text{ب و} + \text{و}^2 + \text{ج}^2 \quad \text{أو} \quad \text{أ}^2 = \text{ب}^2 - 2\text{ب و} + \text{و}^2 + \text{ج}^2$$

نتيجة ٢ - تكافؤ المستطيلين ب ه و د للربعين ب ط و أ م يتوصل به الى هذين

القانونين

$$\text{أ}^2 = \text{ب}^2 - 2\text{ب و} + \text{و}^2 + \text{ج}^2 \quad \text{أو} \quad \text{أ}^2 = \text{ب}^2 - 2\text{ب و} + \text{و}^2 + \text{ج}^2$$

$$\text{أ}^2 = \text{ب}^2 - 2\text{ب و} + \text{و}^2 + \text{ج}^2 \quad \text{أو} \quad \text{أ}^2 = \text{ب}^2 - 2\text{ب و} + \text{و}^2 + \text{ج}^2$$

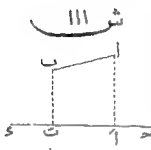
ومنها

$$\frac{\text{ب}}{\text{و}} = \frac{\text{أ}}{\text{ج}}$$

أعني أن أي ضلع من ضلعي القائمة من المثلث القائم الزاوية وسط متناسب بين الوتر بقائه وسهم الوتر المجاور له وأن النسبة بين مربعي ضلعي القائمة مساوية للنسبة الكائنة بين سهمي الوتر
نتيجة ٣ - إذا كان المثلث القائم الزاوية المعلوم $أ ب ح$ متساوي الساقين بأن كان فيه $أ ب = أ ح$ فإنه يحدث بناء على ما تقرر أن

$$ب ح = ٢ أ ب \quad \text{أو} \quad ٢ = \frac{ب ح}{أ ب} \quad \text{أو} \quad ٢ = \left(\frac{ب}{أ}\right)^2$$

أعني أن القوة الثانية للنسبة الكائنة بين قطر المربع وضلعه هي ٢ وحينئذ تكون نفس هذه النسبة مساوية ٢٧ ويحدث $٢٧ = \frac{ب ح}{أ ب} = ٢٧ = ١٤٤٢$



تعريف

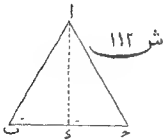
(١١٦) مسقط المستقيم $أ ب$ (شكل ١١١) على المستقيم $ح د$ هو المستقيم $أ ب$ المحصور بين موقعي العمودين النازلين من نهايتي المستقيم $أ ب$ على المستقيم $ح د$

دعوى نظرية

(١١٧) المربع المنشأ على الضلع المقابل لزاوية حادة من أي مثلث يكافئ مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين منه ناقصا ضعف المستطيل الذي قاعدته أحد الضلعين المذكورين وارتفاعه مسقط الثاني عليه

يمكن اعتبار حالتين في هذه الدعوى وهما على حسب وقوع العمود المسقط للضلع المثلث داخله أو خارجه

الحالة الاولى - (شكل ١١٢) نفرض أن الزاوية الحادة هي $ح$ وأن موقع العمود $أ د$ حاصل داخل المثلث على الضلع $ب ح$



فيؤخذ من المثلث القائم الزاوية $أ ب د$ أن $أ ب = أ د + ب د$
ومن المثلث القائم الزاوية $أ د ح$ أن $أ د = أ ح - د ح$
وحيث أن

$$ب د = (ب د - د ح) = (ب د + د ح) - د ح = ب د + د ح - د ح = ب د$$

يكون

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AD} - \overline{DB} + \overline{DC} - \overline{DB} \times \overline{DC} \quad \text{أو} \\ \overline{AB} &= \overline{AD} + \overline{DB} - \overline{DB} \times \overline{DC} \end{aligned}$$

وهو المطلوب

الحالة الثانية - (شكل ١١٣) نفرض أن الزاوية الحادة هي δ وأن موقع العمود $د$ حاصل خارج المثلث على امتداد $د$ فيؤخذ من المثلث القائم الزاوية $أ د س$ أن

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$$

ومن المثلث القائم الزاوية $أ د س$ أن

$$\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{DB}$$

وحيث أن

$$\overline{DB} = (\overline{DB} - \overline{DB}) = \overline{DB} - \overline{DB} \times \overline{DC} + \overline{DB}$$

يكون

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AD} - \overline{DB} + \overline{DC} - \overline{DB} \times \overline{DC} \quad \text{أو} \\ \overline{AB} &= \overline{AD} + \overline{DB} - \overline{DB} \times \overline{DC} \end{aligned}$$

وهو المطلوب

دعوى نظرية

(١١٨) المربع المنشأ على الضلع المقابل لزاوية منفرجة في أي مثلث منفرج الزاوية يكافئ مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين منه زائداً ضعف المستطيل الذي قاعدته أحد الضلعين وارتفاعه مسقط الثاني عليه (شكل ١١٤)

لنفرض أن δ هي الزاوية المنفرجة وأن $د$ مسقط

الضلع $أ د$ على الضلع $د$

فيؤخذ من المثلث القائم الزاوية $أ د س$ أن

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$$



ومن المثلث $أ د ح$ القائم الزاوية أن

$$\overline{أ د} = \overline{أ ح} - \overline{د ح}$$

وحيث أن

$$\overline{د ح} = \overline{د ح} + \overline{ح ب} + \overline{ب د} = \overline{د ح} + \overline{ح ب} + \overline{ب د} \times \overline{د ح}$$

يكون

$$\overline{أ ب} = \overline{أ ح} - \overline{أ د} = \overline{أ ح} - \overline{د ح} + \overline{ح ب} + \overline{ب د} = \overline{أ ح} - \overline{د ح} + \overline{ح ب} + \overline{ب د} \times \overline{د ح}$$

وهو المراد

تنبيه - يستفاد من هذه النظرية واللاتين قبلها أن المثلث القائم الزاوية ينفر دون غيره من المثلثات بهذا الارتباط وهو $\overline{أ} = \overline{ب} + \overline{ح}$

وحيث نقتي وجدهذا الارتباط بين أضلاع أى مثلث فانه يحكم في الحال بأنه قائم الزاوية وعليه فالمثلث الذي مقاس أضلاعه هي ٥ و ٤ و ٣ هو قائم الزاوية لان $\overline{٥} = \overline{٤} + \overline{٣}$

دعوى نظرية

(١١٩) مجموع مربعي أى ضلعين من أى مثلث يكافئ ضعف مربع المستقيم المتوسط

المحصورينهما زائدا ضعف مربع نصف الضلع الثالث
(المستقيم المتوسط هو المار بين رأس المثلث ومنصف القاعدة)
(شكل ١١٥)



فإذا كان أو المستقيم المتوسط بالنسبة للضلع $ح$ وكان $أ د$ عمودا عليه تكون زاوية $أ و ب$ منفرجة ويحصل بمقتضى

نظرية ثمر (١١٨) أن

$$(١) \quad \overline{أ ب} = \overline{أ و} + \overline{و ب} + \overline{و ب} \times \overline{و د}$$

وحيث أن زاوية $أ و ح$ حادة يحصل أيضا بمقتضى نظرية ثمر (١١٧) أن

$$(٢) \quad \overline{أ ح} = \overline{أ و} - \overline{و ح} + \overline{و ح} \times \overline{و د}$$

فإذا جعت هاتان المتساويتان على بعضهما ولو حظ أن $و = ب$ ويحدث

$$\overline{أ ب} + \overline{أ ح} = \overline{أ و} + \overline{أ و} + \overline{و ح} + \overline{و ح}$$

وهو المطلوب

تنبيه - اذ امرز بالحروف ا و ب و ح لاضلاع المثلث وبالحروف ل و م و ن و د للمستقيمت المتوسطة المقابلة لها حدث

$$\begin{aligned} & \text{و} \quad \overline{ل} + \overline{ل} = \overline{ا} + \overline{ب} \\ & \text{و} \quad \overline{م} + \overline{م} = \overline{ا} + \overline{ب} \\ & \overline{ن} + \overline{ن} = \overline{ب} + \overline{ح} \end{aligned}$$

وهي متساويات يتوصل بها الى ايجاد مقادير المستقيمت المتوسطة اذا علم مقادير الاضلاع الثلاثة للمثلث وبالعكس

نتيجة ١ - مجموع مربعات أضلاع أى شكل متوازى الاضلاع يكافئ مجموع مربعي قطريه
نتيجة ٢ - الفرق بين مربعي أى ضلعين من مثلث يكافئ ضعف المستطيل الذى قاعدته الضلع الثالث وارتفاعه مسقط المستقيم المتوسط عليه

وذلك لانه لو طرحت المتساوية (٢) من المتساوية (١) السابقين يحدث

$$\overline{ا} - \overline{ب} = \overline{ا} - \overline{ب} = \overline{ح} \times \overline{د} = \overline{ح} \times \overline{د}$$

وهو المراد

دعوى نظرية

(١٢٠) مجموع مربعات أضلاع أى شكل رباعي يكافئ مجموع مربعي قطريه زائدًا أربعة أمثال

مربع المستقيم الواصل بين منتصفى القطرين (شكل ١١٦)

فإذا كانت نقطة و وسط القطر ا ح ونقطة ه وسط

القطر ب د فإنه يؤخذ من المثلث ا ب د أن (١١٩)

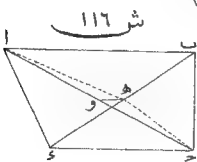
$$\overline{ا} + \overline{ب} = \overline{ا} + \overline{ب} = \overline{ا} + \overline{ب}$$

وكذلك يؤخذ من المثلث ب د ح أن

$$\overline{ب} + \overline{د} = \overline{ب} + \overline{د} = \overline{ب} + \overline{د}$$

ويجمع هاتين المتساويتين على بعضهما يحدث

$$\overline{ا} + \overline{ب} + \overline{ب} + \overline{د} = \overline{ا} + \overline{ب} + \overline{ب} + \overline{د} = \overline{ا} + \overline{ب} + \overline{ب} + \overline{د}$$



لكن المثلث $أ هـ د$ يؤخذ منه أيضاً أن

$$\overline{أ هـ} + \overline{هـ د} = \overline{أ د} = \overline{أ و} + \overline{و د} \quad \text{أو}$$

$$\overline{أ هـ} + \overline{هـ د} = (\overline{أ هـ} + \overline{هـ د}) = \overline{أ و} + \overline{و د} = \overline{أ و} + \overline{و هـ} + \overline{هـ د}$$

ومع الاستعاضة يحدث

$$\overline{أ ب} + \overline{أ د} + \overline{د ح} + \overline{ح ب} = \overline{أ ح} + \overline{ح د} + \overline{د و} + \overline{و هـ}$$

وهو المطلوب

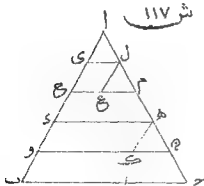
نتيجة - إذا انعدم $هـ و$ بأن كان القطران $ب هـ$ و $أ د$ فيكون الشكل متوازي الاضلاع ويكون مجموع مربعات أضلاعه مكافئاً لمجموع مربعي قطريه وبذلك قد توصلنا إلى النتيجة الأولى من النظرية السابقة وبالعكس إذا وجد في شكل رباعي أن مجموع مربعات أضلاعه يكافئ مجموع مربعي قطريه فيكون متوازي الاضلاع

الفصل الثاني

في الخطوط المتناسبة

دعوى نظرية

(١٢١) إذا قطع ضلعاً مثلثاً بمستقيم مواز لضعه الثالث فإنه يقسمهما إلى أجزاء متناسبة (نظرية طاليس) (شكل ١١٧)



أعني إذا كان $هـ د$ موازياً لـ $ب ح$ وقاطعاً للضلعين $أ ب$ و $أ ح$ فإنه يقسمهما إلى أجزاء متناسبة وللبرهنة على ذلك نفرض أولاً أن المستقيمين $أ د$ و $ب د$ متناسبان أي أنه يوجد بينهما مقياس مشترك خطي ينحصر في الأول ٣ مرات مثلاً وفي الثاني مرتين فتكون النسبة بينهما مساوية إلى $\frac{3}{2}$

(٣) القصة البهية (ثاني)

ثم اذا م د من نقط تقاسيم ا ب مستقيمت موازية ح د فان امتداداتهما تحصر بينهما من المستقيم ا ح أجزاء متساوية أى أن

$$ا ل = م = ه = د = ح$$

وذلك لانه اذا م د من نقطى ل و ه مثل المستقيمان ل ع و ه ك موازيين الى ا ب فالمستقيم ل ع يصير مساويا ح لكونهما متوازيين محصورين بين مستقيمين متوازيين وبعين هذا السبب يكون ه ك مساويا د واذن يكون ل ع مساويا ه ك وبناء عليه يكون المثلثان ل ع م و ه ك متساويين لان فيهما الضلع ل ع مساو للضلع ه ك والزاوية م ل ع مساوية للزاوية د ه ك لانهما زاويتان متناظرتان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين ل ع و ه ك والقاطع ا د والزاوية م ع ل مساوية للزاوية د ك ه لتوازى أضلاعهما المتناظرة واتجاههما في جهة واحدة وينتج من تساويهما أن م ل = د ه وبمثل ذلك يبرهن على تساوى باقى أجزاء المستقيم ا ح وحينئذ فينقسم ا ه الى ثلاثة أجزاء متساوية وينقسم ه د الى جزأين متساويين وتكون النسبة بينهما مساوية الى $\frac{3}{2}$ وهى

$$\text{عن النسبة الكائنة بين ا ب و د ويحدث } \frac{ا ب}{د} = \frac{ا ه}{ه د}$$

وأما اذا لم يكن المستقيمان ا د و د متساويين فانه يبرهن على ما سبق ذكره بقرة (٨٠ جزأول) على أن النسبتين $\frac{ا ب}{د}$ و $\frac{ا ه}{ه د}$ محصورتان بين عددين متواليين من أجزاء الاعشار أو من أجزاء المئين أو من أجزاء الألوف وهكذا واذن فهما متساويتان

نتيجة ١ - يمكن وضع التناسب $\frac{ا ب}{د} = \frac{ا ه}{ه د}$ على الصور الآتية

$$(١) \quad \frac{ا ب}{د} = \frac{ا ه}{ه د}$$

$$(٢) \quad \frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ه}{ا د + د} \quad \text{أو} \quad \frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ه}{ا د} \quad \text{أو} \quad \frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ه}{ا د + د}$$

$$(٣) \quad \frac{ا ب}{د} = \frac{ا ب + د}{د} \quad \text{أو} \quad \frac{ا ب}{د} = \frac{ا ب}{د} \quad \text{أو} \quad \frac{ا ب}{د} = \frac{ا ب + د}{د}$$

نتيجة ٢ - أجزاء المستقيمين ا ب و د المحصورة بين المستقيمت المتوازية ا ح و ه و ح ط و ب د الخ تكون متناسبة (شكل ١١٨)

فإذا كانت م نقطة تلاق المستقيمين ا ب و د فان المثلث م ه د يكون فيه المستقيم ا ح مواز بالقاعدته ويؤخذ منه أن

$$\frac{م ه}{م د} = \frac{ا ه}{د}$$

ويؤخذ أيضاً من المثلث م ح ط أن

$$\frac{م}{و} = \frac{هـ}{ط}$$

وبمقارنة هذا التناسب بالسابق ينتج أن

$$\frac{ا}{و} = \frac{هـ}{ط}$$

وبمثل ذلك يبرهن على أن

$$\frac{ع}{ط} = \frac{هـ}{و}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{ا}{و} = \frac{هـ}{ط} = \frac{ع}{و}$$

وهو المطلوب



دعوى نظرية

(١٢٢) عكس النظرية السابقة صحيح أعني إذا قسم مستقيم ضلعي مثلث الى أجزاء متناسبة يكون موازاً للقاعدته (شكل ١١٩)



أعني إذا كان $\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ج}$ يكون هـ د موازياً بـ ج وللبهينة على ذلك يقال ان لم يكن هـ د موازياً بـ ج لكان غيره د' مثلاً ماراً بنقطة د ويحدث على مقتضى النظرية السابقة أن $\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ج}$ وبمقارنة هذا

التناسب بالتناسب المفسروض وهو $\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ج}$ يتحصل منهما أن $\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ج}$ وهو تناسب فاسد لان بسط الكسر الاول أو أصغر من بسط الكسر الثاني ا هـ ومقام الاول و ب أكبر من مقام الثاني هـ د وحينئذ لا يمكن أن يكون د و مستقيماً آخر خلاف د هـ وهو المطلوب

دعوى نظرية

(١٢٣) المستقيم المنصف لاجدى زوايا مثلث أو المكمل لها يحدد على قاعدته أو على امتدادها

نقطة تكون النسبة بين بعديهما عن نهائى

القاعدة مساوية للنسبة الكائنة بين بعدى

رأسه عن نهائى القاعدة المذكورة (شكل ١٢٠)

(الحالة الاولى) - اذا كان المستقيم ا د منصفاً

للزاوية ب ا ح يرسم من نقطة ح المستقيم

ح ه موازياً ا د ويمد حتى يلاقى امتداد

المستقيم ب ا فى نقطة ه

فالمثلث ب ه ح الحادث فيه المستقيم ا د مواز للقاعدة ح ه فيقسم الضلعين ب ا و ب ح

الى اجزاء متناسبه (٢٢١) ويحدث

$$\frac{ب ا}{ا ح} = \frac{ب د}{د ح}$$

لكن المثلث ا ح ه متساوى الساقين لان فيه زاوية ا ح ه = زاوية د ا ح حيث انهما

متبادلتان داخلتان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين ا د و ح ه والقاطع ا ح وكذا فيه زاوية

ا ح ه = زاوية ب ا د لانهما متناظرتان بالنسبة لعين المستقيمين المتوازيين والقاطع ب ه

وحيث كان الزاويتان ب ا د و د ا ح متساويتين فرضا تكون الزاويتان ا ح ه و ا ح د

كذلك وحيث يكون الضلع ا ح = الضلع ا ه

فاذا استعوض فى التناسب السابق ا ه بمساويه ا د يحدث $\frac{ب ا}{ا ح} = \frac{ب د}{د ح}$ وهو المطلوب

(الحالة الثانية) - اذا كان المستقيم ا د منصفاً للزاوية الخارجة ح ا ه المكمل للزاوية

ب ا ح يرسم من نقطة ح المستقيم ح ه موازاً للمستقيم ا د ويمد ا د حتى يلاقى

امتداد القاعدة ب ح فى نقطة و

فالمثلث الحادث ب ا و فيه المستقيم ح ه مواز لقاعدته ا د فيقسم الضلعين ب ا و ب و

$$\frac{ب ا}{ا د} = \frac{ب و}{و د}$$

لكن المثلث ا ح د متساوى الساقين لان فيه زاوية ح ا د = زاوية د ا ح لانهما متبادلتان

داخلتان بالنسبة للمستقيمين ح ه و ا د المتوازيين والقاطع ا د وكذا زاوية ا ح د تساوى

زاوية واه لانهما متناظران بالنسبة لعين المستقيمين المتوازيين والقاطع ب ه وحينئذ يكون $\frac{ا ح}{ب ح} = \frac{ا د}{ب د}$ فاذا استعوض في التناسب السابق ا ح بمساويه وهو ا د يحدث

$$\frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب د} \text{ وهو المراد}$$

* نتيجة - يمكن أن يعرف ممّا ذكر المحل الهندسي للنقط التي تكون النسبة بين ابعادها

* عن نقطتين ثابتين ب و ح مساوية نسبة معلومة $\frac{ب د}{ب ح}$

* والوصول الى ذلك يلاحظ أولاً أنه لا يوجد على المستقيم الجامع للنقطتين ب و ح الا

* نقطتان فقط تكون النسبة بين بعدى كل واحدة منهما عن النقطتين ب و ح مساوية

* للنسبة $\frac{ب د}{ب ح}$ (شكل ١٢١)

* أما عين النقطتين ب و ح فانه لا يوجد الا نقطة د مثل ا ب ح $\frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب د}$ لانه

* واحدة فقط مثل ا بحيث يكون $\frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب د}$ لانه

* لو وجدت نقطة أخرى مثل ا وحده $\frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب د}$ وقورن هذا بالتناسب السابق

* لحده $\frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب د}$ وهو تناسب ظاهر الفساد

* ثم اذا فرض ان $م < ح$ فأقول أيضاً انه لا يوجد الا نقطة واحدة فقط على امتداد المستقيم

* ب ح مثل نقطة د بحيث يكون $\frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب د}$ وذلك لانه لو وجدت نقطة أخرى مثل

* نقطة د وتحصل منها $\frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب د}$ ثم قارنا هذا التناسب بالسابق اظهر أن

$$\frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب ح} \text{ أو } \frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب د} = \frac{ب د}{ب د} = \frac{ب د}{ب د}$$

* وهو تناسب فساد بين

* اذا قرر هذا وفرض ان م احدى نقط المستوي موفية لهذا الشرط وهو $\frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب د}$

(شكل ١٢٢)

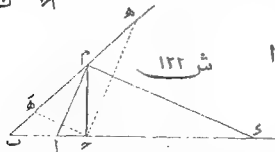
* فانا نصف الزاوية ح م ب بالمستقيم ا

* فيحدث على مقتضى هذه النظرية أن

$$\frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب د}$$

ثم اذا نصفنا الزاوية الخارجة ح م ه بالمستقيم

د يحدث أيضاً أن



$$\frac{r}{s} = \frac{p}{q} = \frac{u}{v}$$

* وحينئذ يشاهدان المستقيمان المنصفين لزاويتي أي نقطة من نقط المحل الهندسي مثل نقطة م
 * يقابلان المستقيم بـ في نقطتين ثابتتين أ و د (حيث قد ثبت عدم إمكان وجود غيرهما)
 * تكون النسبة بين بعدى كل واحد منهما عن ب و د مساوية للنسبة $\frac{r}{s}$
 * ولما كان المستقيمان المنصفان للزاويتين المتجاورتين المتكاملتين هما متعامدان ينتج حينئذ
 * أن جميع نقط المحل الهندسي كائنة على محيط الدائرة التي قطرها أ د
 * ويمكن البرهنة أيضا عن عكس ما ذكر أعني أن أي نقطة من نقط محيط الدائرة تكون إحدى
 * نقط المحل الهندسي

* وذلك لأنه إذا كانت م إحدى نقط المحيط (شكل ١٢٢) فنصل م د و م ب وننصف
 * زاوية د م ب بالمستقيم م أ والزاوية المكملية د م هـ بالمستقيم م د ونجد المستقيم
 * د هـ موازيا م أ و د هـ موازيا م د ويحدث

$$\frac{م د}{م ب} = \frac{أ ب}{م ب} \quad \text{وكذا يحدث} \quad \frac{م د}{م ب} = \frac{أ ب}{م ب}$$

* ومنهما ينتج أن م هـ = م د لكنه حيث كانت زاوية د هـ قائمة لأن ضلعيها موازيان
 * بالنظر للمستقيمين م أ و م د ينتج أن م هـ = م د = م هـ (لأنه لو رسم محيط دائرة على
 * هـ وكان مركزه م فانه يمر بنقطة د ويكون فيه د م و م هـ و م هـ أنصاف أقطار)
 * وأذن يحدث $\frac{م د}{م ب} = \frac{أ ب}{م ب}$ وهو المراد

الفصل الثالث

في تشابه الاشكال

تعريف

(١٢٤) كثيرا الاضلاع المتشابهان هما اللذان تساوت زواياهما المتناظرة وتناسبت أضلاعهما
 المتناظرة ونعني بالاضلاع المتناظرة في كثيرى الاضلاع المتشابهين الاضلاع المجاورة لزوايا
 متساوية

إذا دل عدد α على عدد أضلاع كل واحد من كثيرى أضلاع متشابهين فإن شرط تساوى زواياهما المتناظرة يتوصل به إلى متساويات عددها $\alpha - 1$ أو إلى شروط عددها $\alpha - 1$ وكذا شرط تناسب الأضلاع يتوصل به إلى متساويات أو تناسبات عددها $\alpha - 1$ وحينئذ فتعرف التشابه يقضى بأن الشكلين المتشابهين يجب أن يوفيا شروطها $\alpha - 1$ ومع ذلك فإن ترى فيما يأتى أن تشابه الشكلين يكفيه فقط شروط عددها $\alpha - 1$:

وأما المثلثان المتشابهان فهما اللذان تكون زواياهما المتناظرة متساوية وأضلاعهما المتناظرة متناسبة ونعني بالأضلاع المتناظرة هنا الأضلاع المقابلة للزوايا المتساوية

وتعرف تشابه المثلثات يحتاج إلى أربعة شروط وهى $A = A'$ و $B = B'$ و $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ إذا كان المثلثان هما ABC و $A'B'C'$

وسرى فيما يأتى أن وجود شرطين من هذه الشروط الأربعة في مثلثين يتوصل بهما إلى تحقيق وجود الشرطين الباقيين فيهما وحينئذ فهما كافيان لحصول التشابه

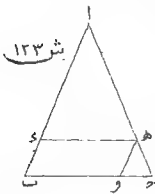
المبحث الأول

في تشابه المثلثات

(١٢٥) قبل التكلم على تشابه المثلثات نذكر هذه القاعدة

(١٢٦) (قاعدة) كل مستقيم يوازي قاعدة مثلث وقاطع ضلعيه الآخر ينجد مثلثا مشابها للمثلث الاصلى

أعني إذا كان المستقيم DE موازيا لقاعدة BC من المثلث ABC وقاطعا للضلعين AB و AC (شكل ١٢٣) يكون المثلث ADE مشابها للمثلث ABC وللبهنة على ذلك يقال أولا - أن زوايا المثلثين متساوية لأن زاوية A مشتركة بينهما وزاوية $ADE =$ زاوية ABC بالتناظر ومثلها الزاويتان ADE و ACB



ثانيا - إذا مبدا المستقيم DE موازيا للمستقيم BC فإنه يحدث على مقتضى نظرية طالس مرة ١٢١ نوالى هذه المتساويات

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

وحيث كان $د = و$ هـ لكونهما متوازيين محصورين بين مستقيمين متوازيين يحدث

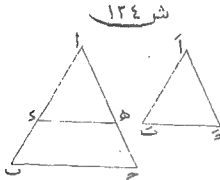
$$\frac{د}{د} = \frac{ا هـ}{ا} = \frac{ا ب}{ب}$$

وهو المراد

دعوى نظرية

(١٢٧) اذا تساوت الزوايا المتناظرة من مثلثين تناسبت أضلاعهما المتناظرة ويكونان إذن متشابهين (شكل ١٢٤)

أعني اذا كانت زاوية $ا = ا'$ و $ب = ب'$ و $د = د'$ يكون



$$\frac{ا ب}{د} = \frac{ا ب'}{د'} = \frac{ا ب}{ا ب'}$$

وللبرهنة على ذلك يؤخذ $ا ب' = ا ب'$ ويرسم المستقيم $د هـ$ موازيا للقاعدة $ب$ فالمثلث $ا د هـ$ يكون مشابها للمثلث $ا ب د$ (قاعدة نمرة ١٢٦) وتكون زاوية $ا د هـ =$ زاوية $ب$ وزاوية $ا هـ د =$ زاوية $د$ ويكون أيضا

$$(١) \quad \frac{ا ب}{د} = \frac{ا ب'}{ا هـ} = \frac{ا ب'}{د هـ}$$

وحيث نعلم سبق علينا سوى البرهنة على ان المثلث $ا د هـ$ يساوي المثلث $ا ب د$ وهي لا تحتاج الا الى البرهنة على ان زاوية $ا د هـ = ب$ وللوصول الى ذلك يقال

ان زاوية $ا د هـ =$ زاوية $ب$ بالتناظر وهذه الزاوية الاخيرة تساوي زاوية $ب$ فرضا فتكون زاوية $ا د هـ =$ زاوية $ب$ وينتج من تساوي المثلثين ان $ا هـ = ا ب'$ و $د هـ = د ب'$ فاذا ابدل في المتساوية (١) الاضلاع $ا د$ و $ا هـ$ و $د هـ$ بما يساويها يحدث

$$\frac{ا ب}{د} = \frac{ا ب'}{ا هـ} = \frac{ا ب'}{د هـ}$$

وهو المطلوب

نتيجة ١ - المثلثان اللذان أضلاعهما المتناظرة متوازية أو متعامدة يكونان متشابهين (نمرة ٥١ جزء أول)

نتيجة ٢ - حيث يكفي لتشابه مثلثين تساوى زاويتين من أحدهما للنظيرتين مامن الثانى فيكفى اذن لتشابه مثلثين فأئى الزاوية مساواةزاوية حادة من أحدهما للنظيرتين مامن الثانى

دعوى نظرية

(١٢٨) اذا تناسبت الاضلاع المتناظرة من مثلثين تساوت زواياهما المتناظرة ويكونان اذن متشابهين (شكل ١٢٤)

وللبرهنة على ذلك يؤخذ $ا ب = ا ب$ ويرسم $د ه$ موازياً للقاعدة $ب ح$ فيكون المثلث $ا د ه$ مشابهاً للمثلث $ا ب ح$ كما تقدم (١٢٦) وتكون زاوية $ا د ه =$ زاوية $ب$ وزاوية $ا ه د =$ زاوية $ح$ ويتحصل أيضاً

$$(١) \quad \frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ب}{ا ه} = \frac{ب ح}{د ه}$$

وحينئذ يبق سوى البرهنة على تساوى المثلثين $ا د ه$ و $ا ب ح$ وللوصول الى ذلك يقال يؤخذ من المنطوق ان

$$\frac{ا ب}{د ه} = \frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ب}{ا ه}$$

وبمقارنة هذا التناسب بالتناسب (١) مع ملاحظة أن $ا د = ا ب$ فاناستنتج مباشرة أن $ا ح = ا ه$ و $ب ح = د ه$ وبذلك يكون المثلثان المذكوران متساويين وتكون زاوية $ا = ا$ وزاوية $ا ه د = د ه$ وزاوية $ا د ه = ب ح$ وهو المراد

تنبيهه - يجب أن يلاحظ هنا أن الزاوية المتساوية فى المثلثين المتشابهين هى المقابلة للاضلاع المتناسبة

دعوى نظرية

(١٢٩) اذا مساوت زاوية من مثلث زاوية أخرى من مثلث آخر وكان الضلعان المحيطان بزاوية المثلث الاول مناسبين للضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثانى فيكون المثلثان متشابهين (شكل ١٢٤)

أعنى اذا كانت زاوية $ا =$ زاوية $ا$ وكان $\frac{ا ب}{ا ح} = \frac{ا ب}{ا ح}$ يكون المثلثان $ا ب ح$ و $ا ب ح$ متشابهين

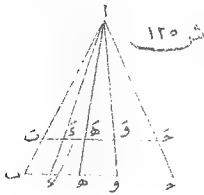
(٤) التحفة اليمية (ثانى)

وللبرهنة على ذلك يؤخذ $ا = ا$ و $ب = ب$ ويرسم ده موازيا للقاعدة ب ح فيكون المثلث الحادث ا د ه مشابه للمثلث ا ب ح وللبرهنة على تساوي المثلثين ا د ه و ا ب ح يؤخذ من المثلثين المتشابهين ا ب ح و ا د ه أن $\frac{ا ب}{ا د} = \frac{ب ح}{د ه}$ وبمقارنة هذه المتساوية بالمفروضة وهي $\frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ح}{ا ه}$ مع ملاحظة أن $ا = ا$ ينتج أن $ا ه = ا ح$ واذن في تساوي المثلثان المذكوران وهو المراد

تنبيه - قد ذكرنا فيقرة ١٢٤ (تعريف) ان تشابه المثلثين يقتضى توفر أربعة شروط ففهمنا ثم ذكرنا أن وجود اثنين منها كاف لتحقيق وجود الاثنين الآخرين وماسلكناه في هذه النظرية وسابقتهما تحقيق لما ذكر وذلك لانه قد فرض في نظرية (قرة ١٢٧) أن $ا = ا$ و $ب = ب$ وأثبتنا أن $\frac{ا ب}{ا د} = \frac{ب ح}{د ه} = \frac{ا ح}{ا ه}$ وكذا قد فرض في نظرية (قرة ١٢٨) أن $\frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ح}{ا ه}$ وأثبتنا أن $ا = ا$ و $ب = ب$ وفي نظرية (قرة ١٢٩) قد فرض أن $ا = ا$ و $\frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ح}{ا ه}$ وأثبتنا أن $\frac{ب ح}{د ه} = \frac{ا ب}{ا د}$ و $\frac{ب ح}{د ه} = \frac{ا ح}{ا ه}$

دعوى نظرية

(١٣٠) المستقيمات الواصلة من رأس المثلث الى قاعدته تقسم هذه القاعدة وماوازاها الى اجزاء متناسبة (شكل ١٢٥) أعنى يكون



$$\frac{ب د}{ب ح} = \frac{د ه}{د ز} = \frac{ه ح}{ه و} = \frac{و ح}{و ح}$$

وللبرهنة على ذلك يؤخذ من المثلثات المتشابهة المتركب منها الشكل سلسلة هذه النسب المتساوية

$$\frac{ب د}{ب ح} = \frac{د ه}{د ز} = \frac{ه ح}{ه و} = \frac{و ح}{و ح} = \frac{ا ب}{ا د} = \frac{ب ح}{د ه} = \frac{ا ح}{ا ه}$$

وبذلك تثبت النظرية

تنبيه - يشاهد مما ذكر ان النسبة الثابتة الكائنة بين الاجزاء المتناظرة من المستقيمين المتوازيين مثل ب ح و ب ح هي عين النسبة الكائنة بين أى قاطع وجزئه الاول نتيجة - عكس هذه النظرية صحيح وتسهل البرهنة عليه

دعوى نظرية

(١٣١) اذا أنزل من رأس المثلث القائم الزاوية عمود على وتره فانه يحدث
أولاً - ان المثلثين الجزئيين يكونان متشابهين ويكون كل واحد منهما متشابهاً للمثلث الاصل
ثانياً - ان كل ضلع من ضلعي القائمة يكون وسطاً متناسباً بين الوتر بتمامه وبين مسقطه عليه
ثالثاً - ان العمود يكون وسطاً متناسباً بين سمى الوتر (شكل ١٢٦)

فإذا كان ABC مثلثاً قائم الزاوية في A و AD هو العمود
و B و C مسقط الضلع AB على الوتر و D مسقط الضلع
 AC عليه فانه يبرهن على الاحوال الثلاثة كما يأتى
أولاً - ان المثلثين ABD و ABC القائمي الزاوية فيهما
زاوية B مشتركة فيكونان متشابهين (نتيجة ٢ عمدة ١٢٧)
ومثلهما المثلثان ADC و ABC القائمي الزاوية لان فيهما زاوية
 C مشتركة بينهما وحينئذ فيكون المثلثان الجزئيان ABD و ADC متشابهين لتساوى
زواياهما المتناظرة

ثانياً - حيث ان المثلثين ABD و ABC متشابهان يتحصل

$$(١) \quad \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$$

وكذلك يؤخذ من المثلثين ADC و ABC المتشابهين هذا التناسب

$$(٢) \quad \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$$

ثالثاً - حيث ان المثلثين الجزئيين ABD و ADC متشابهان يتحصل أيضاً أن

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD} \text{ وهو المراد}$$

نتيجة ١ - اذا اعتبرنا أن الخطوط مقومة بأعدادنا نستخرج من تناسبي (١) و (٢) أن

$$AB \times AC = AD^2 \text{ و } AD \times DC = AC^2$$

وهما متساويتان تدلان على سطوح متكافئة ويتوصل منهما الى ما سبق البرهنة عليه من أن
مربع أى ضلع من ضلعي القائمة في المثلث القائم الزاوية يكافئ المستطيل المجاور له الذى هو جزء
من المربع المنشأ على وتر القائمة المحدباً بمسدد العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على وترها
عمدة ١١٥ ولجميع هاتان المتساويتان على بعضهما الحذف

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = (\overline{CD} + \overline{DB}) = \overline{CB}$$

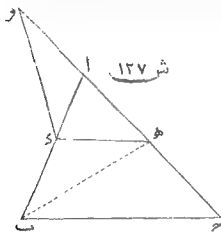
ومن هذه المتساوية يعلم أنه قد توصل الى البرهنة على نظرية (فيثاغورس) بواسطة تشابه المثلثات
نتيجة ٢ - اذا رمزنا بالرموز a, b, c و e لاضلاع المثلث القائم الزاوية b, c, a
و h لارتفاعه فانه يحدث من المثلثين المتشابهين ABC و ABD أن

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{e} \quad \text{ومنه} \quad a \times e = c \times b$$

وهي متساوية حقيقية لدلالة كل طرف منها على ضعف مساحة المثلث القائم الزاوية

دعوى نظرية

(١٣٢) اذا اشترك مثلثان في زاوية تكون النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيل الضلعين المحيطين
بزاوية المثلث الاول الى مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثاني (شكل ١٢٧)
أعني اذا اشترك المثلثان ABC و ADE في زاوية A
يكون



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{أو} \quad \frac{AB \times AE}{AD \times AC} = 1$$

والبرهنة على ذلك يوصل المستقيم DE فالمثلث
 ADE متحد مع المثلث ABC في الارتفاع
فتكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما
أعني يكون

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

وكذا حيث ان المثلثين ADE و ADE متحدان في الارتفاع يحدث

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

وبضرب هاتين المتساويتين في بعضهما وحذف العامل المشترك AE يحدث

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{وهو المراد}$$

* تنبيه - اذا اردنا المستقيم DE جهة A وأخذنا عليه البعد $AD = AE$ ووصل D
فالمثلث الحادث DAE يكون مكافئاً للمثلث ABC لاتحادهما في القاعدة والارتفاع غير أن

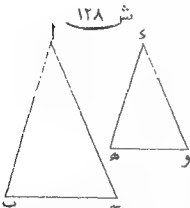
* فيه زاوية واد مكملة لزاوية هـ اء وحيتنا اذا ابدل في المتساوية السابقة المثلث ا هـ د
* بالمثلث المكافئ له اء و والضلع ا هـ بالضلع المساوي له او يحدث

$$\frac{اب}{اى} = \frac{اى \times اء}{اى \times اء}$$

* أعني أنه اذا وجد في مثلثين زاويتان متكاملتان فتكون النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيل
* الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الاول الى مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثانى

دعوى نظرية

(١٣٣) نسبة محيطى المثلثين المتشابهين الى بعضهما كالنسبة بين أى ضلعين متناظرين فيهما
والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى أى ضلعين متناظرين فيهما أيضا (شكل ١٢٨)
برهان الاول يقال يؤخذ من تشابه المثلثين أن



$$\frac{اب}{د هـ} = \frac{اى}{هـ و} = \frac{اى}{هـ و} \text{ أو } \frac{اب}{د هـ} = \frac{اى}{هـ و} = \frac{اى}{هـ و}$$

$$\frac{اب}{د هـ} = \frac{\text{محيط المثلث ا ب ح}}{\text{محيط المثلث د هـ و}}$$

وبرهان الثانى يقال يؤخذ أيضا من تشابه المثلثين أن

$$\frac{اى}{د هـ} = \frac{اى}{هـ و}$$

وحيت كانت زاوية ا = زاوية د فيحدث على مقتضى ما تقرر في النظرية السابقة أن

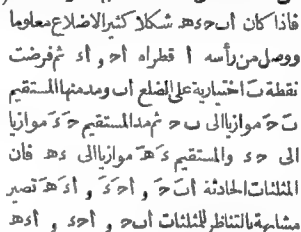
$$\frac{اى}{د هـ} \times \frac{اى}{هـ و} = \frac{اى \times اى}{د هـ \times هـ و} \text{ أو } \frac{اى}{د هـ} = \frac{اى}{هـ و}$$

$$\text{وحيت ان } \frac{اى}{د هـ} = \frac{اى}{هـ و} \text{ يحدث}$$

$$\frac{اى}{د هـ} = \frac{اى}{هـ و} \times \frac{اى}{هـ و} = \frac{اى}{هـ و}$$

وهو المطلوب

(١٣٤) اذا علم أى شكل كثير الاضلاع فانه يمكن ان نمارس ما نخرج بحيث يكون هو والمعلوم من كمين من عدد واحد من المثلثات المتشابهة صورته ووضعا (شكل ١٢٩)



دعوى نظرية

فأفترض أن المثلثات $أ ب ح$ و $أ ح د$ و $أ د هـ$ متشابهة بالنظر للمثلثات $أ ب ح$ و $أ ح د$ و $أ د هـ$ وكانت متعائلة في الوضع يكون الشكلان $أ ب ح د هـ$ و $أ ب ح د هـ$ متشابهين أعني أن زواياهما المتناظرة تكون متساوية وأضلاعهما المتناظرة تكون متناسبة

والبرهنة على ذلك يقال أما تساوى الزوايا المتناظرة من الشكين فهو نتيجة تشابه المثلثات لان منها ما هو عبارة عن زاويتين متناظرتين من مثلثين متشابهين مثل ب و ب' و ه و ه' ومنها ما هو عبارة عن مجموع زوايا متناظرة من عدة مثلثات متشابهة مثل زاوية ا و ا'

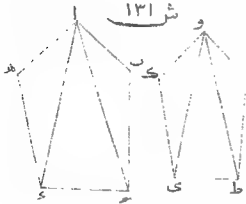
وأما تناسب الاضلاع المتناظرة فهو نتيجة تشابه المثلثات أيضا حيث يتوصل منه الى سلسلة التناسبات الآتية

$$\frac{ا هـ}{هـ ا} = \frac{د هـ}{د ا} = \frac{ا ب}{ب ا} = \frac{ج د}{د ج} = \frac{ا ج}{ج ا} = \frac{ب ج}{ج ب} = \frac{ا ب}{ب ا}$$

تنبيه - يؤخذ من سلسلة التناسبات هذه أن النسبة بين أى قطرين متناظرين مساوية للنسبة الكائنة بين أى ضلعين متناظرين من كثيرى الاضلاع
نتيجة - اذا دلّ ٥ على عدد أضلاع كل واحد من الشكلين المقروضين فإن عدد المثلثات المركبة منها كل واحد منهما يكون مساويا ضرورة الى (٥ - ٢) وحيث أن تشابه أى مثلثين متناظرين منهما يحتاج الى شرطين فيكون عدد الشروط اللازمة لتشابه كثيرى الاضلاع مساويا ضرورة الى ٢ (٥ - ٢) = ٣ - ٤ وهو موافق لما سبق التنويه عنه (بمرة ١٢٤ تعريف)

دعوى نظرية

(١٣٦) وبالعكس كثيرا الاضلاع المتشابهة ان يتركبان من مثلثات متشابهة متحدة في العدد ومماثلة في الوضع (شكل ١٣١)



وللبرهنة على ذلك يعدن نقطة ا احدى رؤس الشكل ا ب ح د هـ قطراه ا د و ا ح ثم يمتد أيضا من نقطة و احدى رؤس الشكل و ح ط ي و و ط ثم يقال المتناظرة للرأس ا قطراه وى و و ط ثم يقال حيث ان الشكلين المقروضين متشابهان تكون زاوية ا ب ح مساوية لتظيرتها و ح ط

ويكون الضلعان ا ب و ب ح مناسبين للضلعين و ح و ح ط أعنى أن

$$\frac{ا ب}{ب ح} = \frac{ب ح}{ح ط}$$

وحينئذ يكون المثلثان ا ب ح و د ح ط متشابهين (١٣٢) لاشتراكهما في زاوية محصورة بين أضلاع متناسبة وينتج من تشابههما أن زاوية ب ح ا = زاوية ح ط و

ثم اذا طرح هاتان الزاويتان المتساويتان من الزاويتين المتساويتين ب ح د و ح ط ي كان الزاويتان الباقيتان ا ح د و و ط ي متساويتين ضرورة لكونهما في جانب كل المثلثان

$$ا ب ح و و ح ط متشابهين يحدث \frac{ا ب}{ب ح} = \frac{ب ح}{ح ط}$$

وكذا يؤخذ من تشابه كثيرى الاضلاع أن

$$\frac{ح ب}{ط ع} = \frac{ح د}{ط ي} \quad \text{واذن يكون} \quad \frac{ح ا}{ط و} = \frac{ح د}{ط ي}$$

وحيث انه قد سبق البرهنة على أن زاوية ا ح د = زاوية و ط ي يكون المثلثان ا ح د و و ط ي متشابهين لاشتراكهما فى زاوية محصورة بين أضلاع متناسبة
وبمثل ذلك يبرهن على تشابه باقى المثلثات فهما كان عدداً أضلاع الشكلىن المقروضين وبذلك
يثبت المطلوب

دعوى نظرية

(١٣٧) النسبة بين محيطى أى شكلىن متشابهين كالنسبة بين ضلعين متناظرين فيهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى الضلعين المذكورين (شكل ١٢٩)
برهان الاول - يقال حيث كان الشكلىان متشابهين يحدث

$$\frac{ا ب}{ا ح} = \frac{ب ح}{ب د} = \frac{ح د}{ح ز} = \frac{د ه}{د ه} = \frac{ه ا}{ه ا}$$

ومن سلسلة هذه التناسبات يؤخذ أن

$$\frac{ا ب}{ا ح} = \frac{ا ب + ح ب + د ح + ز ه + ه ا}{ا ح + ح د + د ز + ز ه + ه ا} \quad \text{أو}$$

$$\frac{ا ب}{ا ح} = \frac{\text{محيط ا ب ح د ه}}{\text{محيط ا ح د ز ه}} \quad \text{وهو المطلوب}$$

وبرهان الثانى - يقال حيث كان المثلثان ا ب ح و ا ح د متشابهين يحدث (١٢٣)

$$\frac{ا ب}{ا ح} = \frac{ا ب}{ا ح} \quad \text{وكذا حيث كان المثلثان ا ح د و ا ح ز متشابهين يكون}$$

$$\frac{ا ح}{ا ح} = \frac{ا ح}{ا ح}$$

ومن هذين التناسبين يؤخذ أن

$$\frac{ا ح}{ا ح} = \frac{ا ب}{ا ح}$$

$$\frac{ا ح د}{ا ح ه} = \frac{ا ح د}{ا ح ه}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{ا ح د}{ا ح ه} = \frac{ا ح د}{ا ح ه} = \frac{ا ح د}{ا ح ه} \text{ أو } \frac{ا ح د}{ا ح ه} = \frac{ا ح د}{ا ح ه} = \frac{ا ح د}{ا ح ه}$$

أو $\frac{ا ح د}{ا ح ه} = \frac{\text{سطح ا ب ح د ه}}{\text{سطح ا ب ح د ه}}$ وهو المطلوب

الفصل الرابع

في أوتار الدائرة وقواطعها

دعوى نظرية

(١٣٨) اذا تقاطع وتران داخل دائرة فان حاصل ضرب جزأى أحدهما مساو لحاصل ضرب جزأى الثانى (شكل ١٣٢) فاذا تقاطع الوتران ا ب و ح د في نقطة و يجب أن يكون

$$ا \times و = و \times ح د$$



وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيمان ا ب و ح د فالتثلثان الحادثان ا و ح د و ب و د يكونان متشابهين لتساوى الزوايا المتناظرة فيهما حيث ان زاوية د و ب = زاوية ح و ا لتقابلهما بالرؤس وان زاوية د = زاوية ا لاتحادهما في المعيار وهو ب و ح واذن فتكون أضلاعهما متناسبة ويحدث

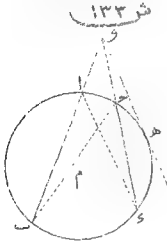
$$\frac{ا}{و} = \frac{و}{ح د} \text{ ومنه } ا \times و = و \times ح د \text{ وهو المطلوب}$$

- * (١٣٩) فائدة - حاصل الضرب ا ب و ح الذي لا يتغير مهما تغير وضع الوتر ا ب لا يرتبط
- * بالوضع النقطة و فاذا ر من بحرف د لبعده نقطة و عن مركز الدائرة وبالر من ب ل نصف
- * قطر الدائرة ومذ من نقطة و قطر حدث ضرورة ل و ح د = (ب + د) (ب - د)
- * = ب - د و يسمى المقدار (ب - د) بقوة نقطة و

(٥) التجفء البهيه (ثاني)

دعوى نظرية

(١٤٠) اذا مد من نقطة خارج دائرة قاطعان لها فان حاصل ضرب أحد القاطعين بتمامه في جزئه الخارج يكون مساويا لحاصل ضرب القاطع الثاني بتمامه في جزئه الخارج (شكل ١٣٣) أعني ان $وب \times او = ود \times وح$



والبرهنة على ذلك يوصل المستقيمان $ح و ا$ و $ا و س$ فالثلثان الحادثان $وب ح$ و $ود ا$ فيهما زاوية مشتركة وزاوية $ب = زاوية د$ لالتحادهما في المعيار فيكونان متشابهين ويحدث

$$\frac{وب}{ود} = \frac{وح}{وا} \quad \text{أو} \quad وب \times او = ود \times وح$$

وهو المطلوب

* نتيجة - اذا مر من محور $د$ لبعده نقطة $و$ عن المركز وبالمر من $و$ لنصف قطر الدائرة ثم وصل بين نقطة $و$ والمركز بمستقيم ومد على استقامته فانه يشاهد ان حاصل الضرب $وب \times او$ مساو الى $(د + و) (د - و) = د^2 - و^2$ وتسمى هذه الكمية بقوة نقطة $و$

تنبيه - اذا تصورنا تحرك القاطع $ود$ حول نقطة $و$ شيئاً فشيئاً بحيث تقرب النقطتان $ح و د$ من بعضهما فانه عندما يتحد النقطتان المذكورتان يأخذ المستقيم $ود$ الوضع $وه$ ويكون مماساً لمحيط الدائرة ويؤول كل واحد من البعدين $ود$ و $وح$ الى البعد $وه$ ويكون بناء على ذلك

$$وه^2 = وب \times وا \quad \text{أو} \quad \frac{وب}{وه} = \frac{وا}{وه}$$

أعني أن المماس يكون وسطاً متناسباً بين القاطع بتمامه وجزئه الخارج ومع ذلك فانه يمكن البرهنة على هذه النظرية بمباشرة

دعوى نظرية

(١٤١) اذا مد من نقطة خارج محيط دائرة قاطع لها ومماس فان المماس يكون وسطاً متناسباً بين القطع بتمامه وجزئه الخارج (شكل ١٣٤) أعني أن $\frac{وب}{وا} = \frac{وا}{وا}$



والبرهنة على ذلك نصل المستقيمين $ا ح$ و $ح ب$ فالثلثان
الحادثان $و ح ب$ و $و ح ا$ فهما زاوية و مشتركة
وزاوية $ب =$ زاوية $ا$ لاتحادهما في المعيار $\frac{ا}{ب}$
فيكونان متشابهين ويحدث

$$\frac{و ب}{و ح} = \frac{و ح}{و ا} \text{ ومنه } و ح^2 = و ا \times و ب$$

وهو المراد

* نتيجة - ينتج مما ذكر ان مربع المماس يدل على مقدار قوة نقطة $و$ وهو $(و ا - و ب)$
* ومع ذلك فإنه ليس سهل معرفة ذلك مباشرة اذ الوجدان الابعاد $ا$ و $ب$ و $و ح$ يتركب منها
* مثلث قائم الزاوية في $ح$ ووتره $ا$

* (١٤٢) ويمكن تلخيص جميع ما ذكر بخصوص قوة أى نقطة بالنسبة لدائرة فيقال
* ان المقدار $ا - ب$ يمكن جعله قانونا عاما لبيان قوة أى نقطة مهما كان وضعها وذلك لانه
* اذا جعل $ح$ رمزاً لهذا القانون يحدث $ح = ا - ب$ أو

* فكل نقطة مفروضة خارج الدائرة يكون فيها $ا > ب$ ويكون حينئذ $ح < ٠$ أى موجباً
* وكل نقطة مفروضة على محيط الدائرة يكون فيها $ا = ب$ ويكون حينئذ $ح = ٠$
* وكل نقطة مفروضة داخل الدائرة يكون فيها $ا < ب$ ويكون حينئذ $ح > ٠$ أى سالباً

الفصل الخامس

في نظريات مهمة تتعلق بالثلثات وبالشكال الرباعية
التي يمكن رسمها داخل الدائرة

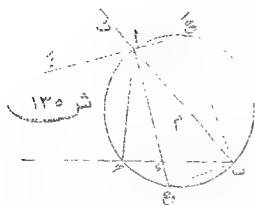
دعوى نظرية

* (١٤٣) اذا نصفت احدى زوايا مثلث أو المكمل لها بمستقيم فإن مستطيل الضلعين
* المحيطين بهما يساوى في الحالة الاولى لمستطيل قسمي القاعدة زائداً مربع المستقيم المنصف
* وفي الثانية مستطيل بعدى نقطة تقابل المستقيم المنصف بامتداد القاعدة عن نهايتيها ناقصاً
* مربع المستقيم المنصف (شكل ١٣٥)

* ليكن $ا د$ منصفاً لزاوية $ب ا ح$, $ا د$ منصفاً لزاوية $د ا ب$ فيكون

* في الحالة الاولى $ا ب \times ا د = ا د \times د ب + ا د \times ا د$

* وفي الحالة الثانية $ا ب \times ا د = ا د \times د ب - ا د \times ا د$



* والبرهنة على ذلك يرسم محيط دائرة على المثلث

* ثم يمد المستقيم النصف $ا د$ على استقامته

* حتى يقابل المحيط في نقطة $ح$ وسط القوس

* $ح د ب$ ويمد أيضاً المستقيم النصف $ا د$

* على استقامته جهة $ا$ حتى يقابل المحيط

* في نقطة $ع$ وسط القوس $ح ا ب$ ويوصل

* المستقيمان $ح ب$ و $ع ب$ ثم يقال

* أولاً - ان المثلثين $ا ح د$ و $ا ب ح$ فيهما زاوية $ح ا د$ = زاوية $ح ا ب$ بالتصنيف

* وزاوية $ا ح د$ = زاوية $ح$ لانهما مرسومتان في قطعة واحدة واذن تكون الزاوية

* $ا د ح$ = الزاوية $ا ب ح$ ويكون المثلثان متشابهين ويحدث

* $\frac{ا ب}{ا ح} = \frac{ا د}{ا ح}$ أو $ا ب \times ا د = ا ح \times ا د = ا ح (ا د + د ح) = ا د \times ا د + ا د \times د ح$

* غير أن $ا د \times د ح = ا د \times د ب$ (١٣٨) فيكون $ا ب \times ا د = ا د \times د ب + ا د \times ا د$

* ثانياً - ان المثلثين $ا د ح$ و $ا ب ح$ فيهما زاوية $د ا ح$ = زاوية $د ا ب$ = $ح ا ب$

* وزاوية $د ا ح$ = زاوية $ب ح ا$ لانهما مكملتان لزاوية $ا ح ب$ وحينئذ يكونان

* متشابهين ويحدث

* $\frac{ا ب}{ا ح} = \frac{ا د}{ا ب}$ أو $ا ب \times ا د = ا ح \times ا د = ا د (د ح - ا د) = ا د \times د ح - ا د \times ا د$

* غير أن $ا د \times د ح = ا د \times د ب$ (١٤٠) فيكون $ا ب \times ا د = ا د \times د ب - ا د \times ا د$

* وهو المراد

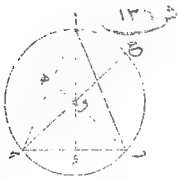
* تنبيه - يتوصل بهذه النظرية الى معرفة مقادير أطوال المستقيمتين المنصفتين لزاويا المثلث

* اذا علمت أضلاعه حيث انه يسهل حساب مقادير أطوال أجزائه القاعده $د ب$ و $د ح$ أو

* $د ب$ و $د ح$ اذا علمت الاضلاع الثلاثة

دعوى نظرية

- * (١٤٤) مستطيل أى ضلعين من أى مثلث يساوى المستطيل المتكوّن من ارتفاع المثلث المقابل للضلع الثالث ومن قطر الدائرة المرسومة عليه (شكل ١٣٦)
- * ليكن $أ ب$ المثلث المعلوم و $ا د$ العمود المقابل للضلع الثالث $ب$ و $ح$ قطر الدائرة المرسومة على المثلث فيكون $أ ب \times ا د = ا ح \times ا ب$
- * وللهذه على ذلك نصل المستقيم $ا ح$ فالثلثان $ا ب ح$ و $ا د ب$ القاع الزاوية فيهما زاوية $ا ح$
- * تساوى زاوية $ا ب$ لا تحادهما في المقياس $ا ب$
- * واذن يكونان متساويين ويحدث
- * $\frac{ا ح}{ا ب} = \frac{ب ح}{ا د}$ أو $ا ب \times ا د = ا ح \times ب ح$
- * وهو المطلوب



- * نتيجة - اذا ضرب طرفي المتساوية الاخيرة في طول الضلع الثالث $ب$ يحدث
- * $ا ب \times ا ب \times ا د = ا ح \times ب ح \times ا د$
- * غير أن الحاصل $ا ب \times ب ح$ يدل على ضعف مساحة المثلث فاذا جعل $م$ رمز المساحة المثلث و $ن$ رمز النصف قطر الدائرة تحدث
- * $ا ب \times ا ب \times ا د = ب ح \times ب ح \times ا د = م \times م \times ا د$
- * أعني أن حاصل ضرب أضلاع المثلث الثلاثة مساو لمساحته مضروبة في أربعة أمثال نصف قطر الدائرة المرسومة عليه

- * تنبيهه - ويمكن البرهنة على أن مساحة المثلث تساوى حاصل ضرب محيطه مضروباً في نصف نصف قطر الدائرة المرسومة داخله (شكل ١٣٧)
- * وذلك لان مجموع الثلثات $ب ح د$ و $ح و ا$ و $ا و ب$ المتحدة
- * في الارتفاع مساو لثلث الكلي $ا ب ح$ وحيث ان مساحة
- * كل واحد منها مساو لحاصل ضرب قاعدته في نصف ارتفاعه
- * فتكون مساحة المثلث الكلي مساوية لحاصل ضرب نصف
- * الارتفاع المشترك $ا د$ ونصف نصف قطر الدائرة المرسومة داخله في
- * مجموع قواعد المثلثات المتراكبة منها وفي محيطه ويثبت المطلوب



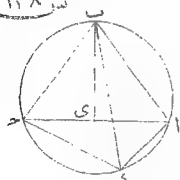
دعوى نظرية

*

* (١٤٥) في كل شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة مستطيل قطريه يساوى مجموع

المستطيلين المتكون كل واحد منهما من ضلعين متقابلين منه (نظرية بطليموس) (شكل ١٣٨)

ش ١٣٨



* وللبهنة على ذلك يرسم المستقيم بى بحيث تكون

* زاوية ح بى = زاوية ا ب د ويمتد حتى يلاقى

* المستقيم ا ح فالثالث الحادث ح بى يكون

* متساويا لثالث ا ب د لان فيهما زاوية ح بى =

* زاوية ا ب د عملا وزاوية ب ح د = زاوية ب د ا

* لانهما من سومتان في قطعة واحدة واذن يتركب هذا

* التاسب

$$\frac{ب د}{ا د} = \frac{ح بى}{ا ب د} \text{ ومنه } ب د \times ا د = ا ب د \times ح بى$$

*

* ثم يقال ان المثلثين ا بى و ب د ح متساويان لان فيهما زاوية ا بى = زاوية ب د ح

* وذلك لان زاوية ا ب د = زاوية بى ح كانهما قائمتان لكل واحد منهما الزاوية بى دى

* كان المجموعان ا بى و ب د ح متساويين وفيهما أيضا زاوية ب ا بى = زاوية ب د ح

* لكونهما من سومتين في قطعة واحدة واذن يتركب هذا التاسب

$$\frac{ا ب د}{ا بى} = \frac{ب د ح}{بى دى} \text{ ومنه } ا ب د \times بى دى = ا بى \times ب د ح$$

*

* ويجمع هذه المتساوية على السابقة لها يحدث

$$ا ب د \times ح د + ا ب د \times ا د = (ا ب د + ا بى) \times ب د ح$$

*

* وهو المطلوب

دعوى نظرية

*

* (١٤٦) في كل شكل رباعي لا يمكن رسمه داخل الدائرة مستطيل قطريه أقل من مجموع

* مستطيل اضلاعه المتقابلة (شكل ١٣٩) أعني أن في الشكل الرباعي ا ب د ح الذى

* يمر محيط الدائرة بثلاثة من رؤسه فقط دون الرابعة

$$ا ب د \times ح د + ا ب د \times ح د > ا ب د \times ا د + ا ب د \times ب د$$

*

* والبرهنة على ذلك تصنع زاوية أبى = زاوية دى ح و زاوية ب أبى = زاوية
 * ب د ح فالستقيم أبى لا يمكن أن يتقدم أب لان
 * نقطة د ليست موجودة على المحيط وأن زاوية ب د ح
 * مغايرة لزاوية ب أ ح ثم يوصل بعنذلك المستقيم دى
 * فالمثلثان أبى و ب د ح فهما الزاوية المتساوية
 * متساوية عملا فيكونان متشابهين ويحدث

* $\frac{أب}{بى} = \frac{أب}{د ح}$ ومنه أبى \times دى = ب د \times ح
 * وأما المثلثان ب د ح و أب د فان فيهما زاوية ب د ح = زاوية أب د وذلك
 * لان زاوية دى ح = زاوية أبى عملا فإذ اطرح من كل واحدة منهما الزاوية ب دى
 * يكون الباقيان ح بى و د ب أ متساويين ولما نسبة تشابه المثلثين أبى و ب د ح
 * يحدث

$$\frac{أب}{بى} = \frac{أب}{د ح} \quad *$$

* واذن يوجد في المثلثين المذكورين زاوية مشتركة بمحاطة بأضلاع متناسبة فيكونان
 * متشابهين ويحدث

$$\frac{أب}{بى} = \frac{أب}{د ح} \quad \text{ومنه} \quad بى \times دى = دى \times ح \quad *$$

* وبضم هذه المتساوية على السابقة لها يحدث

$$ب د (ح بى + دى) = دى (بى + ح) \quad *$$

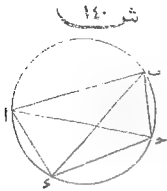
* وحيث كان ح بى + أبى < أبى يكون ب د \times ح > أبى \times دى + دى \times ح
 * وهو المراد

* تنبيهه - يستتبع من هذه النظرية ان كل شكل رباعي وجد فيه مستطيل قطره مساو
 * لمجموع مستطيل أضلاعه المتقابلة فإنه يمكن رسمه داخل الدائرة الألفلا

* دعوى نظرية

* (١٤٧) في كل شكل رباعي يمكن رسمه داخل الدائرة نسبة أحد قطره الى قطره الثاني كنسبة
 * مستطيل الضلعين المنتهين باحدى طرفي القطر الاقل زائداً مستطيل الضلعين المنتهين

* بطرفه الثاني الى مستطيل الضلعين المنتهين بأحد طرفي القطر الثاني زاوية مستطيل الضلعين المنتهين بطرفه الثاني (شكل ١٤٠)



$$* \text{ أعي أن } \frac{س \times ح د + ا س \times ب}{س \times ا س + ح د \times ب} = \frac{ا}{س}$$

* وللبهنة على ذلك يقال انه نظرا لانقسام الشكل الرباعي

* ا ب ح د الى المثلثين ا ب ح و ا ح د يحدث بناء على

* ما تقدم (١٤٤ نتيجة) أن

$$* ا ب \times ح د = ا ح \times ب ح$$

$$* ا س \times ح د = ا ح \times س ح$$

* وبضمهما الى بعضهما يحدث

$$* ا ح (ا ب \times ح د + ح د \times ا س) = ا س (ا ب \times ح د + ح د \times ا س) \quad (١)$$

* ونظرا لانقسام الشكل الرباعي المذكور الى المثلثين ا ب س و ب ح د يحدث أيضا

$$* ا س \times ا ب = ب ح \times ا س$$

$$* ب ح \times ح د = س ح \times ح د$$

* وبالجمع يحدث

$$* ب س (ا س \times ا ب + ا ب \times ح د) = ا س (ب ح \times ح د + ح د \times ا س) \quad (٢)$$

* وبمقارنة المتساوية (١) بالمتساوية (٢) يحدث

$$* ا ح (ا ب \times ح د + ح د \times ا س) = ب س (ا س \times ا ب + ا ب \times ح د) \text{ أو } ا ح$$

$$* \frac{ا ب \times ح د + ا س \times ب}{س \times ا س + ح د \times ب} = \frac{ا}{س} \text{ وهو المراد}$$

الفصل السادس

في الدعاوى العملية الأساسية

دعوى عملية

(١٤٨) المطلوب تقسيم مستقيم معلوم إلى أجزاء متساوية (شكل ١٤١) فإذا أريد تقسيم



المستقيم المعلوم AB إلى خمسة أجزاء متساوية مثلاً يقال

أنا لؤذ كرنا ما نقرر بالنتيجة الثانية من غرة (١٢١)

لعلمنا الحل مباشرة فيؤخذ على مستقيم ما AC خارج

من نقطة A خمسة أبعاد متساوية للبعد الاختياري AC

ثم نوصل المستقيم CB ويمرر من نقط تقاسيم AC

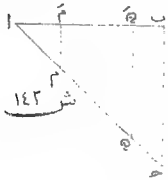
مستقيمت موازية CB فينقسم بذلك المستقيم AB

إلى خمسة أقسام متساوية

تنبيه - وكان يمكن استنتاج حل هذه المسئلة من نظرية غرة (١٣٠)

دعوى عملية

(١٤٩) المطلوب تقسيم مستقيم معلوم إلى أجزاء مناسبة لخطوط معلومة (شكل ١٤٢)



فإذا أريد تقسيم المستقيم AB إلى ثلاثة أجزاء مناسبة

لثلاثة خطوط مستقيمة معلومة a و b و c

يعد من نقطة A مستقيم كيفما اتفق AC ونؤخذ

عليه المستقيمت الثلاثة المعلومة أحدها بجانب الآخر

ثم نوصل نهاية المستقيم الحاصل من ذلك وهي C بنقطة

B ويرسم من نقطتي a و b مستقيمتين موازيين CB

فينقسم بذلك المستقيم AB إلى أجزاء مناسبة للمستقيمت المعلومة (١٢١)

تنبيه ١ - ومع ذلك فإنه كان يمكن استنتاج حل هذه المسئلة من نظرية غرة (١٣٠)

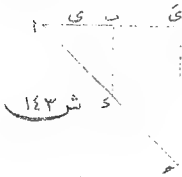
تنبيه ٢ - إذا أريد تعيين نقطتين على المستقيم الواصلين A و B بحيث يكون

البعدان الواصلان من كل واحدة منهما إلى النقطتين A و B مناسبين لمستقيمين معلومين

a و b يقال (شكل ١٤٣)

(٦) التحقق البهية (ثاني)

اماتعين نقطة مثل نقطة $ي$ بين $ا$ و $ب$ موفية للشرط المطلوب فهذا يمكن اجراؤه كما ذكر في هذه النظرية وأما إذا أريد تعيين نقطة على امتداد المستقيم $ا ب$ موفية لهذا الشرط فإن هذا يقتضي أن يؤخذ البعد $ا ح$ مساويا $م$ مثلا ثم يؤخذ البعد $ح د$ مساويا $ن$ ثم يوصل $د ب$ ويرسم من نقطة $ح$ المستقيم $ح ي$ موازيا $د ب$ فتكون $ي$ هي النقطة المطلوبة لانه يحدث

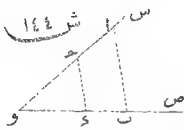


$$\frac{ا ح}{ب ي} = \frac{ح د}{د ب} \text{ وهو المراد}$$

دعوى علمية

(١٥٠) المطلوب إيجاد الرابع المناسب لثلاثة خطوط معلومة (شكل ١٤٤)

إذا كانت الخطوط الثلاثة المعلومة هي $ا$ و $ب$ و $ح$ فإن ما يقرر في النتيجة الثانية من (عمر ١٢١) كاف لمعرفة طريقة حل هذه المسألة فترسم زاوية كمنافق $س$ و $ص$ ويؤخذ على جهتي نقطة $و$ بعدان مساويين للظولين المركبين للنسبة الأولى وهما $ا = ا و$ و $ب = ب و$ ثم يوصل المستقيم $ا ب$ ويؤخذ على الضلع $و س$ البعد



$و ح$ مساويا للطول الثالث المعالم $ح$ فإذا رسم $ح د$ موازيا $ا ب$ فإن البعد $و د$ يكون هو الرابع المناسب المطلوب لانه يحدث $\frac{ا}{ب} = \frac{ا و}{ب و}$

ومع ذلك فإنه كان يمكن حل هذه المسألة بواسطة ما تقرر بفرقة (١٣٠) وعلى العموم جميع النظريات التي يوجبها أربعة خطوط متناسبة أو التي يكون فيها مستطيل خطين مساويا لمستطيل خطين آخرين يمكن استعمالها لحل مسألة إيجاد الرابع المناسب

نتيجة - ليكن المطلوب إيجاد طول المستقيم $س$ بحيث يكون $س = \frac{ا ب}{ح}$ وبعبارة أخرى المطلوب إيجاد ارتفاع مستطيل قاعدته $ا$ يكون مكافئاً لمستطيل آخر بعداه معلومان $ب$ و $ح$ فإن المسألة تنزل إلى إيجاد الرابع المناسب للخطوط الثلاثة (يجب ترتيب الخطوط) $ا$ و $ب$ و $ح$ لانه يتحصل هذا التناسب $\frac{ا}{ب} = \frac{ا و}{ب و}$ ومنه $س = \frac{ا ب}{ح}$

تنبيه - إذا كان $ب = ح$ فإن الخط $س$ يسمى بالثالث المتناسب بين الخطين $ا$ و $ب$ ويكون $س = \frac{ا ب}{ب}$

دعوى عملية

(١٥١) طريقة إيجاد الوسيط المناسب بين مستقيمين معلومين
إذا كان المستقيمان المعلومان هما $أ$ و $ب$ والوسيط المناسب هو $س$ لزم أن يكون
$$\frac{س}{ب} = \frac{ب}{أ} \text{ أو } س = ب \times \frac{ب}{أ}$$

ولحل هذه المسئلة يقال

أولاً - ان خاصية العمود النازل من رأس المثلث القائم الزاوية على وتره وتصل بها إلى حل هذه



المسئلة ولذلك يرسم المستقيم $ب$ (شكل ١٤٥)

مساويا لمجموع الخطين المعلومين أحدهما من $ب$ إلى $د$

والثاني من $د$ إلى $ح$ ثم يرسم على المستقيم $ب$ نصف

دائرة ويقام من نقطة $د$ العمود $د أ$ فيكون هو مقدار

س المطلوب

ثانياً - من المعلوم أن أى ضلع من ضلعي القائمة من المثلث القائم الزاوية وسط مستقيم بين

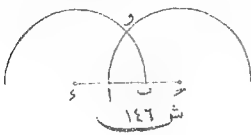
الوتر بقسامه وبين مسقط الضلع المذكور عليه وحينئذ فيمكن أن يستخرج من هذه الخاصية

حل للمسئلة أنسب من الحل السابق فيما إذا كان $أ$ و $ب$ كبيرين

ثالثاً - من المعلوم أن مماس الدائرة وسط مستقيم بين قاطعها بقسامه وجزءه الخارج وحينئذ

فيمكن بواسطة هذه النظرية حل المسئلة التي نحن بصدد حلها

رابعاً - إذا كان $أ ب = ب$ (شكل ١٤٦) و $أ ح = ب د = د$ فإنه يجعل النقطتان



$د$ و $ح$ مركزين ويرسم محيطاً دائرتين بنصف

قطر واحد مساوياً فيقطع المحيطان في نقطة و

ويكون أحد البعدين $ب د$ أو $د أ$ هو الوسيط

المتناسب المطلوب

وذلك لأنه يحدث (١١٧) أن

$$ب د = د د + د د - د د = د (د - د) \text{ أو } د (د - د)$$

$$ب د = د د - د د + د د = د (د - د) \text{ أو } د (د - د)$$

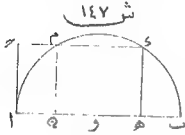
$$ب د = د د - د د + د د = د (د - د) \text{ أو } د (د - د)$$

وهي طريقة بسيطة لا تحتاج إلا استعمال البرجل فقط بعد رسم المستقيم $د$

نتيجة ١ - يؤخذ من المقدار $س = ١ \times ب$ ان طريقة إيجاد الوسط المتناسب الهندسى
توصل بها الى حل المسئلة الآتية وهى
طريقة انشاء مربع يكافئ اُما مستطيلا أو متوازى أضلاع أو مثلثا أو شبه منحرف معلوما
نتيجة ٢ - ويعلم من طريقة إيجاد الوسط المتناسب الهندسى أن الوسط المتناسب الهندسى
 $١٧ \times ب$ بين العددين ١ و ب هو أقل من الوسط المتناسب العددى $\frac{١+ب}{٢}$ بين العددين
المذكورين

دعوى عملية

(١٥٢) المطلوب رسم مستطيل يكافئ مربعا معلوما بحيث يكون مجموع ضلعي المستطيل
التجاورين معلوما (شكل ١٤٧)
من المعلوم انه اذا أنزل من رأس المثلث القائم الزاوية عمود على وتره فان هذا العمود يقسم الوتر
الى جزأين يكون مستطيلهما مساويا لمربع العمود



وحينئذ فيؤخذ المستقيم الاختيارى أب المساوى لمجموع
المعدين المعلوم ويرسم عليه نصف محيط دائرة ثم يقام من
نقطة أ العمود أح على القطر ويؤخذ عليه البعد أح
مساويا لضلع المربع المعلوم ويمتد من نقطة ح المستقيم
حدم موازيا أب فاذا أنزل من نقطة م العمود م

على أب فالمستقيمان أ د و ح ب يكونان هما بعدي المستطيل المطلوب

* نتيجة - اذا أريد إيجاد جذرى المعادلة $س^٢ - أس + ب = ٠$ يجب البحث
* عن الخطين $س$ و $س'$ الموفيين للشرطين الآتين
* $س + س' = ١$ و $س س' = ب$

* وحينئذ فيؤول الامر الى المسئلة المتقدمة

* وأما جذرا المعادلة $س^٢ + أس + ب = ٠$ فهما مساويان فى المقدار المطلق لجذرى

* المعادلة السابقة ولذا يبحث عنهما بعين الطريقة السابقة

تنبيه - يجب ان تكون المسئلة ممكنة ان لا يتجاوز البعد أح نصف القطر أو أعنى ان لا
يتجاوز ضلع المربع المعلوم نصف المستقيم أب

وحينئذ فيكون أكبر المستطيلات الممكنة التى يكون مجموع ضلعها التجاورين مساويا للمستقيم
المعلوم أب هو المربع المرسوم على نصف المستقيم المذكور

دعوى عملية

(١٥٣) المطلوب رسم مستطيل يكافئ من بعاده معلوما بحيث يكون الفرق بين ضلعي المستطيل المتجاورين معلوما (شكل ١٤٨)



حل هذه المسئلة يقال اننا لو اتخذنا ان عماس محيط الدائرة وسط متناسب بين قاطعها بقمامه وبين جزئه الخارج أعنى ان المستطيل الذى بعده القاطع بقمامه وجزؤه الخارج يكافئ المربع المنشأ على المماس وان الفرق بين القاطع بقمامه وبين جزئه الخارج هو قطر الدائرة لظهور لنا طريقة لحل هذه المسئلة التى نحن بصدد حلها بواسطة ان يرسم على المستقيم المعلوم ا ب دائرة باعتبار قطرها

لها ويقاوم من نقطة ا العمود ا ح على هذا القطر ويؤخذ منه البعد ا ح مساويا لضلع المربع المعلوم ثم يوصل القاطع ح ه مارا بالمركز فيكون بعد المستطيل المطلوب ه ا ح ه و ح د

* نتيجة - اذا اريد ايجاد جذرى احدى المعادلتين

$$* \quad \text{س}^2 - \text{اس} - \text{د} = 0 \quad \text{و} \quad \text{س}^2 + \text{اس} - \text{د} = 0$$

* وجعل س و س رمزين للتقديرين المطلقين لهذين الجذرين وفرض أن س هو

* الجذر الاكبر وجب ايجاد الخطين اللذين يكونان بحيث ان س - س = ا و س - س = د

* وحيث قد يرجع الامر الى المسئلة المتقدمة

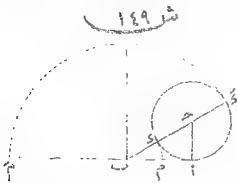
دعوى عملية

(١٥٤) المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى قسمين ذات وسط وطرفين وبعبارة أخرى المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى قسمين مختلفين بحيث يكون الاكبر وسطا متناسبا بين المستقيم الكامل وجزئه الاصغر (شكل ١٤٩)

أعنى اذا علم مستقيم مثل ا ب وكان المطلوب ايجاد نقطة عليه مثل نقطة م بحيث يكون بعدها عن نقطة ب وسطا متناسبا بين المستقيم الكلى ا ب وبين بعدها عن نقطة ا يقال نفرض ان المسئلة تحاول فيحدث على مقتضى المنطوق ان

$$\frac{اب}{م} = \frac{م}{ام} \quad \text{أو} \quad \frac{اب}{م} = \frac{اب + م}{م} \quad \text{أو} \quad م(اب + م) = م^2$$

وحيث نذ فيتوصل الى المقدار م ب بواسطة انشاء مستطيل يكافئ المربع $\overline{أب}$ بحيث يكون
 القوس بين ضلعيه المتجاورين مساويا $\overline{أب}$
 وأن أصغر البعدين يدل ضرورة على م ب
 فإذا رجعنا الى العمدة السابقة أمكن استنتاج
 طريقة العمل الآتية



يقام من نقطة أ نهاية المستقيم أب عود
 مساو نصف أب ثم يرسم محيط دائرة بنصف

القطر أ ب ويوصل نقطة ب بالمركز فالجزء الخارج ب ز من القاطع يدل على البعد المطلوب
 م ب وهو الجزء الأكبر من المستقيم أب المنقسم الى قسمين ذات وسط وطرفين
 * نتيجة ١ - يمكن تعميم منطوق المسئلة التي نحن بصدد حلها فيقال

* المطلوب تعيين النقط الموحدة على المستقيم أب أو على امتداده الموافقة لهذا الشرط وهو
 * أن البعد الواصل من أيها الى نقطة ب يكون وسطا متناسبا بين البعد أب وبين بعدها
 * عن نقطة أ

* يسهل مشاهدة أنه لا يوجد من هذه النقط الاثنان فقط وذلك لانه
 * أولا - اذا انتقلت نقطة م متحركة من نقطة ب الى نقطة أ فإن النسبة $\frac{أب}{بم}$ تبدئ
 * من اللانهاية له عندما تكون نقطة م منطبقة على نقطة ب وتنتهي بالوحدة عندما تكون
 * نقطة م منطبقة على نقطة أ

* وأما النسبة $\frac{بم}{بأ}$ فإنها تبدئ بالصفر وتنتهي باللانهاية له وحيث أن الكسر الأول كان أولا
 * أكبر من الكسر الثاني ثم صار أصغر منه فينتج من ذلك لزوم وجود نقطة مثل م بين أ و ب
 * تكون فيها هاتان النسبتان متساويتين وهذه هي النقطة التي سبق التكلم عليها

* ثانيا - اذا انتقلت نقطة م متحركة على امتداد أب جهة ب فإن النسبة $\frac{أب}{بم}$
 * تبدئ أولا باللانهاية له عندما تكون نقطة م منطبقة على نقطة ب وتنتهي بالصفر عند
 * ما تكون نقطة م على بعد لانهاى من نقطة ب وأما النسبة $\frac{بم}{بأ}$ فإنها تبدئ بالصفر وتنتهي
 * بالوحدة (لان البسط والمقام بصيران لانهائين) وحيث أن الكسر الأول كان أولا أكبر
 * من الثاني ثم صار أصغر منه فيدل ذلك على لزوم وجود نقطة على امتداد أب وعلى شمال
 * نقطة ب مثل نقطة م تكون فيها النسبتان المذكورتان متساويتين بحيث يكون

$$\frac{أب}{بم} = \frac{بم}{بأ} \quad \text{أو} \quad م ب (م ب - أ ب) = \overline{أب}^2$$

* ومن ذلك يشاهد أن هذه النقطة تتعين أيضا بواسطة رسم مستطيل يكافئ المربع \overline{AB} ويكون الفرق بين ضلعيه المتجاورين مساويا \overline{AB} غير أن البعد \overline{AB} كبيرها هو \overline{M} وحينئذ
 * يكفي للوصول الى هذا الحل الثاني أن يؤخذ القاطع \overline{BD} على امتداد المستقيم \overline{AB}
 * ثالثا - اذا انتقلت نقطة \overline{M} متحركة على امتداد المستقيم \overline{BA} جهة \overline{A} فان النسبة \overline{AB}
 * تبدئ أولا بالوحدة عندما تكون نقطة \overline{M} منطبقة على نقطة \overline{A} ثم تنهى بالضرع عندما تكون
 * نقطة \overline{M} على بعد لانها في من نقطة \overline{A} وأما النسبة الثانية \overline{MB} فانها تبدئ باللانهاية
 * وتنتهى بالوحدة وحيث ان النسبة الاولى هي دائما أصغر من الثانية فهذا يدل على أنه لا يمكن
 * وجود نقطة على شمال نقطة \overline{A} من امتداد المستقيم \overline{AB} تكون فيها النسبتان متساويتين
 نتيجة ٢ - يسهل تعيين مقدار \overline{MB} و \overline{MA} بدالة المستقيم المعلوم \overline{AB} الرموز له
 بالحرف \overline{A} لانه يحدث على مقتضى ما تقر بجملة (١٣١) أن

$$\text{أولا } \overline{M} = \overline{B} = \overline{D} = \overline{C} = \overline{A} \quad \text{وهو } \overline{M} = \overline{B} = \overline{D} = \overline{C} = \overline{A} \quad \text{وهو } \overline{M} = \overline{B} = \overline{D} = \overline{C} = \overline{A}$$

$$\text{ثانيا } \overline{M} = \overline{B} = \overline{D} = \overline{C} = \overline{A} \quad \text{وهو } \overline{M} = \overline{B} = \overline{D} = \overline{C} = \overline{A} \quad \text{وهو } \overline{M} = \overline{B} = \overline{D} = \overline{C} = \overline{A}$$

دعوى عملية

(١٥٥) المطلوب رسم مثلث يكافئ كثيرا أضلاع معلوما (شكل ١٥٠)



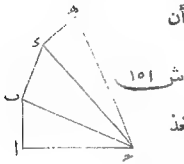
حل هذه المسئلة تكفي أن نبين كيف يمكن تحويل
 أى شكل كثيرا الاضلاع الى آخر يكافئه يكون عدد
 رؤسه أقل بواحد من عدد رؤس الاول
 ليكن \overline{ABCD} هو شكلا كثيرا الاضلاع فنصل
 أحدا أقطاره \overline{AD} ثم نرسم من الرأس \overline{B} المستقيم
 \overline{BE} مواز لهذا القطر \overline{AD} حتى يتقابل مع
 امتداد الضلع \overline{DC} في نقطة \overline{E} ونوصل \overline{AE} او فالثلاث الحادث \overline{ADE} يكون مكافئا للثلاث
 \overline{ABC} لاتحادهما في القاعدة والارتفاع وحينئذ اذا استعوضنا المثلث \overline{ADE} بالمثلث \overline{ADE}
 يكون الشكل الرباعي \overline{ABCE} هو مكافئا للشكل الخماسي المقروض
 نتيجة ١ - يمكن تحويل أى شكل كثيرا الاضلاع الى مربع يكافئه وذلك لانه بعد أن نفعل
 الشكل المقروض الى مثلث يكافئه فانه يستخرج الوسط المناسب بين قاعدة المثلث الحادث
 وبين نصف ارتفاعه فيكون هو ضلع المربع المطلوب

نتيجة ٢ - وكذا يمكن تحويل أى شكل كثير الاضلاع الى مستطيل يكافئه معلوم القاعدة
لانه بعد تحويل الشكل الى مثلث يكافئه يوضع $ل س = ب ع$
بفرض أن ل تدل على قاعدة المستطيل المعروفة و ب على قاعدة المثلث و ع على ارتفاعه
و س على ارتفاع المستطيل المطلوب وحينئذ يكون س عبارة عن الرابع المتناسب بين
الخطوط الثلاثة ل و ب و $ع$

دعوى عملية

(١٥٦) المطلوب انشاء مربع يكافئ مجموع مربعين أو مربعات معلومة (شكل ١٥١)

يرمز بالحرف أ و ب و ج و د ... الخ لاضلاع المربعات
المعلومة وبالحرف س لضلع المربع المطلوب وحينئذ يجب أن
يرسم المستقيم



$$س = \sqrt{ا^2 + ب^2 + ج^2 + د^2 + ...}$$

فيريهم مستقيم $ا = ب$ ويقام من نهاية ا عمود عليه ويؤخذ
أ ب = ب فيحدث

$$\sqrt{ا^2 + ب^2} = ب \text{ أو } \sqrt{ا^2 + ب^2} = ب$$

ثم يقام من نقطة ب عمود على ج ب ويؤخذ منه د = ج ويوصل د س فيحدث

$$\sqrt{ا^2 + ب^2 + ج^2} = د \text{ أو } \sqrt{ا^2 + ب^2 + ج^2} = د$$

ثم يقام من نقطة د عمود على د س ويؤخذ منه ه = د ويوصل ه ج فيحدث

$$\sqrt{ا^2 + ب^2 + ج^2 + د^2} = ه \text{ أو } \sqrt{ا^2 + ب^2 + ج^2 + د^2} = ه$$

نتيجة - يستخرج من هذه العملية كيف يمكن رسم المقادير ٢٧١ و ٣٧١ و ٥٧١
وطريقة ذلك أن يرسم الشكل ١٥١ ويؤخذ فيه $ا = ب = ج = د$

تنبيه - يتوصل بواسطة نظرية (ثمرة ١١٥) الى طريقة رسم مربع يكافئ الفاضل بين
مربعين معلومين

دعوى عملية

(١٥٧) المطلوب انشاء مربع تكون نسبته الى مربع معلوم كالنسبة بين خطين معلومين (شكل ١٥٢) الخطان المعلومان هما $م = م$ و $و = و$ وضع المربع المعلوم هو $ا$



لحل هذه المسئلة يقال ان قد ثبت في نظرية ١١٥ ان النسبة بين المربعين المتشابهين على ضلعي القائمة من المثلث القائم الزاوية هي كالنسبة بين مسطقي هذين الضلعين على الوتر وهذه ملحوظة يتوصل بها مباشرة الى طريقة الحل

فيؤخذ على مستقيم غير محدود البعد $م = م$ والبعد $و = و$ ثم يرسم نصف محيط دائرة على مجموعهما $م$ ويقام من نقطة $و$ العمود $ح$ على $م$ ثم يوصل نقطة $ح$ بنقطتي $م$ و $و$ فيتكون من ذلك مثلث قائم الزاوية فيه

$$\frac{م}{و} = \frac{ح}{م}$$

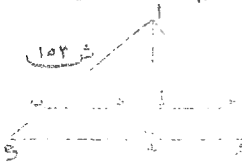
فاذا كان $و = ا$ يكون $ح = م$ هو ضلع المربع المطلوب والا فيؤخذ $ا = ا$ ويرسم $ا ب$ موازيا $م و$ ويحدث

$$\frac{م}{و} = \frac{ح}{م} = \frac{ا ب}{ا}$$

واذن يكون $ح$ هو ضلع المربع المطلوب

دعوى عملية

(١٥٨) المطلوب ايجاد مستقيم تكون نسبته الى مستقيم آخر معلوم كالنسبة بين مربعين معلومين (شكل ١٥٣)



ضلع المربعين المعلومين هما $ب$ و $ح$ والمستقيم المعلوم هو $م$

يرسم زاوية قائمة غير محدودة الضلعين ويؤخذ على ضلعها $ا ب = ب$ و $ا ح = ح$ ويوصل

$ب ح$ وينزل من نقطة $ا$ العمود $ا ط$ على $ب ح$ فيتصل

(٧) التحفة البهية (ثاني)

$$\frac{ب}{ط} = \frac{أ}{ط} = \frac{ب}{ط}$$

فإذا كان ط مساويا للطول المعلوم م يكون ب ط هو المستقيم المطاوب والافيه وخذ ح د = م ويرسم من نقطة د مستقيم يوازي أ ح فيقابل هو أ وامتداده العمود في نقطة مثل ه يمتد منها المستقيم و ح موازيا ب ح ويحدث

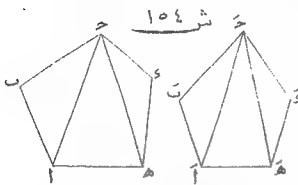
$$\frac{ب}{ط} = \frac{ع}{م} = \frac{ب}{ط}$$

ويكون ع ه هو المستقيم المطاوب

نتيجة - يمكن دائما إيجاد خطين تكون النسبة بينهما كالنسبة بين أى شكلين معلومين وذلك بأن يحول أولاً كل واحد من الشكلين المعلومين الى مربع يكافئه ثم يفرض لأحد الخطين المطاوبين طول اختياري ويبحث عن الثاني كما في الدعوى المتقدمة

دعوى عملية

(١٥٩) المطاوب رسم شكل يشابه آخر معلوما على مستقيم معلوم (شكل ١٥٤)



فإذا كان المستقيم المعلوم أ ب مناظرا للضلع أ ب من الشكل المعلوم أ ب ح د وتذكرنا ما قرر في نظريات الاشكال المتشابهة سهل علينا الوصول الى حل هذه المسئلة فيوصل أ قطار الشكل المعلوم ثم يبدأ بإنشاء مثلث

على الضلع أ ب يشابه المثلث أ ب ح د بان يرسم زاوية ب أ د = ب أ ح وزاوية أ ب د = أ ب ح ثم يرسم بعد ذلك على الضلع أ د نظير الضلع أ ح مثلث يشابه المثلث أ ب ح كما هو ويسمى العمل حتى ينتهي تشكيل الشكل أ ب د ه الذي يتركب اذن من مثلثات متشابهة لثلاث الشك المعلوم ومتحدة معها في العدد ومماثلة لها في الوضع

دعوى عملية

(١٦٠) المطاوب رسم شكل يشابه شكلين معلومين متشابهين ويساوى مجموعهما أو التفاضل بينهما

إذا كان الشكلان المعلمان هما $ج$ و $ك$ وضلعاهما المناظران هما $ا$ و $ب$ ورمز الشكل المطلوب بالحرف $ص$ وضلعه المناظر للضلعين المعاليمين بالحرف $س$ وفرض أن المسئلة محلولة فنحيث أن الشككين $ج$ و $ك$ متشابهان يحدث

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{ك} \quad \text{أو} \quad \frac{ا}{ب+ا} = \frac{ج}{ك+ج}$$

وحيث أن الشكل المطلوب $ص$ يجب أن يكون متشابه الكل واحد من الشككين المعاليمين لزم أن يكون

$$\frac{ا}{س} = \frac{ج}{ص}$$

فاذا قارنا هذا التناسب بالسابق ولاحظنا أن $ص$ يجب أن يكون مساويا $ج + ك$ لزم أن يكون $س = ا$ أعنى يكون $س$ وتر المثلث قائم الزاوية ضلعا قائمته $ا$ و $ب$ وإذا لاحظنا أن $ص$ يجب أن يكون مساويا $ج - ك$ لزم أن يكون $س = ا - ب$ أعنى أن $س$ يكون أحد ضلعي مثلث قائم الزاوية وتره $ا$ وضلعه الثالث $ب$ وحيث أنه قد رجع الأمر إلى مسئلة ثمرة (١٥٦)

دعوى عملية

(١٦١) المطلوب رسم شكل يشابه شكلا آخر معلوما وتكون نسبته إليه كنسبة خطين معلومين $م$ و $د$

إذا كان $ج$ رمز الشكل المعلوم و $ا$ رمز الاحد أضلاعه و $ص$ رمز الشكل المطلوب و $س$ رمز الاحد أضلاعه المناظر للضلع $ا$ فإنه يحدث على مقتضى المنطوق أن

$$\frac{ا}{د} = \frac{ص}{ج}$$

وحيث أن الشككين يجب أن يكونا متشابهين يحدث أيضا

$$\frac{س}{ا} = \frac{ص}{ج}$$

ومن هذين التناسبين يحدث

$$\frac{ا}{د} = \frac{س}{ا}$$

وحيث أنه قد رجع الأمر إلى نظرية ثمرة (١٥٧)

دعوى علمية

(١٦٢) المطلوب رسم شكل يشابه شكلاً معلوماً ϵ ويكون في آخر معلوماً κ
نفرض أن σ هو ضلع الشكل σ المجهول المناظر للضلع α من الشكل المعلوم ϵ
ونفرض أن μ و ν ضلع المربعين المكافئين بالنظر للشكلين κ و ϵ فيحدث

$$\frac{\mu}{\epsilon} = \frac{\nu}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\alpha}$$

وكذا يحدث أيضاً أن

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\sigma}{\alpha}$$

وبأخذ جذر حدود هذا التناسب بفرض أن تلك الخطوط مقدرة بأعداد يحدث

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\sigma}{\alpha}$$

واذن يكون σ رابعاً متناسباً بين الخطوط الثلاثة α و μ و ν

دعوى علمية

(١٦٣) المطلوب رسم محيط دائرة يميز بنقطتين معلومتين α و β وليس مستقيماً معلوماً ϵ
(شكل ١٥٥)

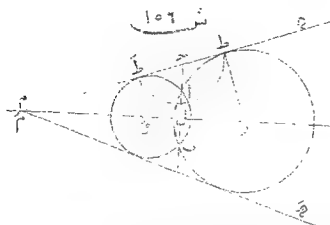


نفرض أن المسئلة محولة وأن ω هي مركز الدائرة المطلوبة فإذا
مدد المستقيم $\alpha\beta$ حتى يقابل المستقيم المعلوم في نقطة γ فن
حيث أن γ يجب أن يكون مماساً لمحيط الدائرة يحدث
 $\gamma\omega = \gamma\alpha \times \gamma\beta$ واذن يكون $\gamma\omega$ وسطاً متناسباً بين
 $\gamma\alpha$ و $\gamma\beta$ فإذا أخذنا عن مقداره وأخذنا في جهتي نقطة γ
بعدان مساويان لطول هذا الوسط المناسب فإنه يتوصل إلى
حلين للمسئلة

تنبيه ١ - إذا كان وضع النقطتين α و β حاصلًا في جهتي المستقيم المعلوم ϵ
تكون المسئلة غير ممكنة الحل

تنبيه ٢ - في حالة ما يكون المستقيم $\alpha\beta$ موازياً للمستقيم المعلوم فإنه لا يتأتى إجراء العمل
المتقدم غير أنه في هذه الحالة يسهل إيجاد نقطة التماس كما لا يخفى

(شکل ۱۵۶)

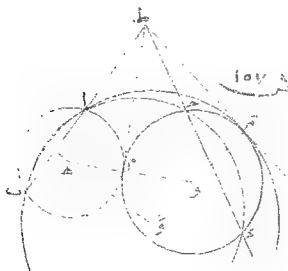


يمكن أن يتوصل إلى حل هذه المسألة بواسطة ترجيعها إلى المقدمة وذلك لأن مركز الدائرة المطاوية يوجد ضرورة على المستقيم النصف للزاوية الكائنة بين المستقيمين ومن جهة أخرى إذا أنزل من نقطة أ المعامدة عمود على المستقيم النصف وأخذ عليه ل ب =

ل ١ فأن نقطة ب توجد أيضا على محيط الدائرة المطلوبة وحينئذ فيقول الامر الى ترقيم محيط دائرة
بحسب النقطتين المعطويتين ا و ب وبمس مسقما معلوما م د

دعوی عملیہ

(شکل ۱۵۷)



نفرض أن المسئلة تحاول وأنها دائرة هـ هي الدائرة المطلوبة فإذا امتد من نقطة تماس محيطي الدائرتين م مماس مشترك لهما م ط وامتد أب على استقامته حتى يقابل هذا المماس المشترك في نقطة ط وانقبت نقطة ط مثل ح على محيط الدائرة العلوية ووصل المستقيم ط ح فإنه يحدث بمقتضى ماسق بكرة (١٤٠) أن

$$a \times b = 1 \times 1 \text{ أو } a \times b = \overline{1}, \text{ أو } a \times b = \overline{1}$$

واذن فتوجد النقط الاربعة ب و ا و ح و د على محيط دائرة واحد وحينئذ اذا رسمت الدائرة التي تمر بالنقط الثلاثة المعروفة ب و ا و ح فانها تعين النقطة الرابعة بتقاطع هذه الدائرة بالدائرة المعروفة وبذلك تعلم طريقة الحل

وهي ان تؤخذ نقطة اختيارية ح على الدائرة المعروفة ويمرر بها وبالنقطتين المعولتين محيط دائرة فيقطع محيط الدائرة المعروفة في نقطة د فاذا وصل ح د ومد على استقامته ثم مد ا ب ايضا حتى يتلاقيا في نقطة ط ورسم المماس ط م للدائرة المعروفة كانت نقطة م هي نقطة تماس الدائرة المطلوبة بالدائرة المعروفة واما مركز الدائرة المطلوبة فيوجد في تقاطع العمود المقام على وسط الوتر ا ب مع العمود م ه المقام على المماس

حيث انه يمكن مد مماس آخر ط م للدائرة المعروفة فيكون اذن للمسئلة حلان وتكون نقطة ه مركزا للدائرة النانية الموافقة للشروط المعروفة

وبمثل ذلك يجري العمل لو كان النقطتان داخل الدائرة اما اذا كانت احدى النقطتين داخل الدائرة المعروفة والنانية خارجها فتكون المسئلة غير ممكنة

دعوى عملية

(١٦٦) المطلوب إيجاد الحل الهندسى للنقط التي تكون بحيث ان مجموع مربعي البعدين

الواصلين من أيهما الى نقطتين معلومتين ثابتتين معلوم وثابت دائما (شكل ١٥٨)

ليكن ب و ح النقطتين المعولتين الثابتتين و م المربع الثابت المعلوم فاذا فرض ان نقطة ا هي احدى نقط الحل الهندسى تحصل على مقتضى المنطوق ان

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AM}^2$$

لكن

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$$



بفرض ان نقطة و هي وسط المستقيم ح ب وحينئذ يكون

$$\overline{BO} = \overline{CO} = \frac{1}{2} \overline{BC} \quad \text{أو} \quad \overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BO}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CO}^2$$

وحيث كان م ثابتا وكان و نصف ح ثابتا ايضا فيكون مقسدار أو ثابتا كذلك

أعني يكون بعد نقطة ا عن نقطة و ثابتا دائما واذن فيكون الحل الهندسى هو محيط دائرة نصف

قطره الضلع الثالث من مثلث قائم الزاوية وتره يساوى $\frac{1}{2} \overline{BC}$ وضلعه الآخر يساوى ب و

دعوى علمية

(١٦٧) المطلوب إيجاد المحل الهندسى للنقط التى تكون بحيث ان الفرق بين مربعى البعدين الواصلين من أيم إلى نقطتين معاوختين ثابتين معلوم وثابت دائما (شكل ١٥٩)

لتكن أ احدى نقط المحل و د مسقط الخط المتوسط أو الثلث أ ب على ب ح وليكن م' المربع المعلوم فعلى حسب المنطوق يكون

$$أ ب^2 = أ م'^2$$

وعلى مقتضى ما نقرر فى نظرية ثمرة (١١٨) يحدث

$$أ ب^2 = أ ح^2 = ب ح \times د ح$$

وحيث أن يكون

$$ب ح \times د ح = م' ومنه د ح = \frac{م'}{ب ح}$$

وحيث كان كل من م' و ب ح ثابتا فيكون مقدار د ح كذلك ويكون المحل حينئذ هو المستقيم أ د العمودى على المستقيم الواصل بين النقطتين المعاوختين ويكون بعده عن وسط هذا المستقيم هو الرابع المتناسب بين الخطوط ب ح و م و م

الفصل السابع

تمارينات

- ١ - إذا دل العددين ٧٥ مترا مربعا و ٢٥ مترا مربعا على مستطيلين متحدى القاعدة وكان ارتفاع أكبرهما ١٥ مترا فاحس مقدار ارتفاع الثانى
- ٢ - إذا دل العددين ١٥ مترو ٥٥ متر على قاعدتى مستطيلين متحدى الارتفاع وكانت مساحة أصغرهما ٢٥ مترا مربعا فاحس مساحة المستطيل الثانى
- ٣ - إذا دل العدد ١٢٠ مترا مربعا على مساحة مستطيل قاعدته ٢٠ مترا والمطلوب تعيين ارتفاع المثلث الذى قاعدته أربعة أمثال قاعدته هذا المستطيل ومساحته ثلاثة أمثال مساحته

- ٤ - اذادل عدد ٢٥ على النسبة الكائنة بين مربعين فمقدار النسبة بين ضلعيهما
- ٥ - المطلوب تعيين النسبة الكائنة بين مربعين ضلعاهما ٣ متر و ٦ متر
- ٦ - اذا كان طول العمود النازل من رأس المثلث القائم الزاوية على وتره مساويا ٤ متر وكان طول أحد ضلعي القائمة مساويا ٥ متر وطول مسقطه على الوتر مساويا ٣ متر والمطلوب تعيين مقدار طول ضلعها الثاني ومقدار مسقطه على الوتر
- ٧ - اذادل عدد ١٨ مترا مربعا على مربع وتر المثلث القائم الزاوية المتساوي الساقين والمطلوب تعيين طول العمود النازل من الرأس على الوتر
- ٨ - اذادلت الاعداد ٥ متر و ٧ متر و ٩ متر على أطوال أضلاع مثلث والمطلوب تعيين أطوال المستقيمت المتوسطة له
- ٩ - اذادل الاعداد ٦ و ٨ على مقامى ضلعي مثلث ثم وصل بين منتصفيهما مستقيم طوله ٥ متر والمطلوب تعيين مقدار ضلعه الثالث
- ١٠ - اذادلت الاعداد ٢٠ متر و ٢٢ متر و ٣٠ متر على أضلاع مثلث ثم نصف الزاوية المحصورة بين الضلعين ٢٠ متر و ٢٢ متر بمستقيم والمطلوب تعيين مقدارى سهمى الضلع الثالث المحددين بالمستقيم المنصف
- ١١ - اذا قطع الضلعان أ ب و أ ح من المثلث أ ب ح بالمستقيم د ه الموازى لقاعدته ب ح والمتباعد عنها بالبعد ع والمطلوب حساب بعد المستقيم القاطع د ه عن الرأس أ اذا كان د ه = ١٨ متر و ب ح = ٢٥ متر و ع = ٢٠,٢٠ متر (شكل ١٦٠)
- ١٢ - المطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين منتصفى قطرى شبه المنحرف يساوى نصف الفرق بين قاعدتيه المتوازيتين
- ١٣ - اذا مد فى دائرة نصف قطرها ١,٢٠ متر وتر طوله متر واحد والمطلوب تعيين بعده عن المركز
- ١٤ - اذا مد فى دائرة نصف قطرها ٨ متر وتر طوله ٨ متر والمطلوب حساب سهمى قطر الدائرة العمودى على هذا الوتر والمحدد به
- ١٥ - اذادل الاعداد ٨ متر و ٣ متر على نصفى قطرى دائرتين والعدد ١٥ متر على البعد الكائنين بين مركزيهما والمطلوب حساب طول المماس المشترك بينهما فى الخارج



١٦ - إذا دلت الأعداد ٨ مترو ٩ مترو ١٥ متر على أطوال أضلاع مثلث فزاوية المقابلة للضلع الأكبر منه

١٧ - إذا دل العددين ٨ مترو ١٠ متر على نصفي قطري دائرتين والعدد ١٢ متر على مقدار البعدين من مركزيهما والمطلوب حساب طول الوتر المشترك بينهما

١٨ - المعلوم زاوية ونقطة داخلها والمطلوب تمديد مستقيم من هذه النقطة قاطعاً الضلع الزاوية بحيث تكون النسبة بين البعدين المحصورين بين هذه النقطة وضلع الزاوية مساوية $\frac{2}{3}$

١٩ - المعلوم مستقيم م والمطلوب تعيين مستقيم آخر بحيث يكون مربعه مساوياً $\frac{3}{5}$ م^٢

* ٢٠ - طريقة رسم مربع داخل مثلث معلوم

* ٢١ - المطلوب تعيين المثلث القائم الزاوية الذي تكون مقادير أضلاعه الثلاثة أعداداً متوالية

* ٢٢ - إذا كان الفرق بين ضلعي القائمة من المثلث القائم الزاوية مساوياً ٧ متر وكان طول وتره مساوياً ١٣ متر والمطلوب حساب ضلعي القائمة

* ٢٣ - المطلوب تعيين أضلاع المثلث القائم الزاوية إذا علم أن طول وتره يزيد عن أحد ضلعي القائمة متراً واحداً وعن الضلع الثاني ثمانية أمتار

* ٢٤ - إذا كان وتر المثلث القائم الزاوية مساوياً ٥٥ متر ومجموع الضلعين المحيطين بالقائمة مساوياً ٧٧ متر والمطلوب تعيين ضلعي القائمة

* ٢٥ - إذا كان مجموع الأضلاع الثلاثة للمثلث القائم الزاوية مساوياً ٦٠ متر والفرق بين الضلعين المحيطين بالقائمة مساوياً ٥ متر والمطلوب تعيين أضلاع المثلث القائم الزاوية الثلاثة

* ٢٦ - إذا علم القسم الأكبر من قسمي المستقيم المنقسم إلى خمسة ذات وسط وطرفين والمطلوب تعيين طول المستقيم الأصلي

الباب الثاني

في الاشكال المنتظمة وقياس الدائرة

تعاريف

(١٦٨) الشكل المنتظم هو شكل تساوت أضلاعه وزواياه مقداراً أى زاوية من أى شكل منتظم مرتبط بعدد أضلاعه فإذا كان \mathfrak{D} دالاً على عدد أضلاع شكل منتظم كان مجموع الزوايا القائمة الداخلة فيه مساوياً $\mathfrak{C} = (\mathfrak{D} - 2) \mathfrak{C} = 2 - \mathfrak{D}$ وعليه فقد ار كل زاوية يساوى $\frac{2}{\mathfrak{D}} - 2 = \frac{2}{\mathfrak{D}} - 2$ فأما أبسط الاشكال المنتظمة هو المثلث المتساوى الاضلاع ومقدار زاويته هو $\frac{2}{3}$ فأما وعملاً كـ ينبغ أن الشككين المنتظمين المتحددين في عدد الاضلاع تكون زواياهما متساوية

(١٦٩) حيث ان الزوايا متساوية في أى شككين منتظمين متحددين في عدد الاضلاع وان النسبة بين أى ضلعين منهما مساوية لضرورة للنسبة الكائنة بين أى ضلعين آخرين فيكونان اذن متشابهين

(١٧٠) يوجد أشكال منتظمة من كل نوع من أنواع الاشكال لاننا لو تصورنا انقسام محيط دائرة الى أجزاء متساوية عددها \mathfrak{M} ووصل بين نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمات فإنه يتشكل من ذلك كثيراً أضلاع منتظم عدد أضلاعه \mathfrak{D} وذلك لانه أو لا حيث ان أضلاعه أو ثلثها أو اقلها أو مساوية فتكون متساوية وثانيها حيث ان زواياه مرسومة في قطع متساوية فتكون متساوية أيضاً

* (١٧١) اذا قسم محيط دائرة الى أقسام متساوية عددها \mathfrak{M} ولم نصل بين نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمات كما سبق ذكر ذلك بل وصل بينها فوناً فوناً (أى وصل بين النقطة الاولى والثالثة وبين الثالثة والخامسة وبين الخامسة والسابعة وهكذا) أو وصل بين النقطة الاولى والخامسة وبين الخامسة والتاسعة وهكذا) وكان \mathfrak{D} أولياً مع \mathfrak{M} فانا نبرهن على اننا ترجع الى نقطة المبدأ بعد عمليات عددها \mathfrak{M}

* ولذلك يقال اذا مررنا بالحرف \mathfrak{C} لمحيط الدائرة فان مقدراً لكل قسم من الاقسام المنتقسم اليها يكون مساوياً $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}}$ ومتى وصلت نقط التقاسيم فوناً فوناً فان مقدراً كل قوس موتر بأحدهذه الأوتار يكون مساوياً الى $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}}$ وحينئذ فلاجل تطبيق وتره هذا القوس على المحيط مراراً

* ثم العودة الى نقطة المبدأ يجب أن يكون تكرار هذا القوس $\frac{2}{3}$ عدة مرات عددها س
* مساويا للعدد صحيح من المحيطات نرمز له بحرف ل وبناء عليه يكون

$$(١) \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ ل أو } \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ ل}$$

* وحيث ان ل عدد صحيح لم أن يكون الكسر $\frac{2}{3}$ دالا أيضا على عدد صحيح ولما كان
* $\frac{2}{3}$ أوليا مع م فرضا لم أن يكون $\frac{2}{3}$ عددا صحيحا وحينئذ فقل مقدار يعطى الى س
* يكون هو م وهو المطلوب

* الشكل المتكئون بهذه الصورة يسمى شكلا منتظما نجميا والبرهنة على تساوى أضلاعه
* وزواياه سهلة غير اننا لاحظ أيضا أنه يمكن الحصول على عين الشكل المنتظم النجمى المذكور
* سواء وصل بين نقط التقاسيم نوناونا كما ذكر أو وصل بينها (م - ٢) و (٢ - ٢)
* وينتج من ذلك أنه يمكن الوصول الى جميع الاشكال المنتظمة الممكنة التى عددها م بواسطة
* البحث عن جميع الاعداد الأولية مع م من ابتداء الواحد الى $\frac{1}{2} م$
* فاذا فرض الان وجود عامل مشترك ه بين م و ٢ بأن كان $٢ = ٢ ه$ و $م = م ه$
* مثلا فان المتساوية (١) السابقة نقول الى

$$(٢) \quad \frac{٢ ه}{م ه} = \frac{٢}{م} \text{ ل أو } \frac{٢ ه}{م ه} = \frac{٢}{م} \text{ ل}$$

* وهذه المتساوية الاخيرة تدل على أنه اذا أعطى س مقدارا مساويا م فاننا نرجع الى نقطة
* المبدأ بعد عمليات عددها م وبذلك يتوصل الى كثير اضلاع منتظم عدد أضلاعه م
* ولنطبق ما ذكر على بعض أمثلة فنقول

* أولا - اذا قسم المحيط الى خمسة أقسام متساوية ووصل بين نقط التقاسيم المتوالية
* بمسقطيات فاننا نتوصل الى الشكل النجمى المنتظم الخمس أاما اذا وصل بين نقط التقاسيم
* اثنتين اثنتين فاننا نرجع الى نقطة المبدأ بعد خمس عمليات حيث ان عدد م أولى مع عدد ٥
* وبذلك يتوصل الى الشكل النجمى المنتظم النجمى

* ثانيا - اذا قسم محيط الدائرة الى عشرة أقسام متساوية ووصلت نقط التقاسيم المتوالية
* بمسقطيات فاننا نتوصل الى الشكل العشر المنتظم الخمس وأما اذا وصلت ثلاثا ثلاثا فاننا نتوصل
* الى الشكل العشر المنتظم النجمى

* ثالثا - اذا قسم محيط الدائرة الى خمسة عشر جزءا متساوية ووصلت نقط التقاسيم المتوالية
* بمسقطيات فاننا نتوصل الى الشكل دى الخمسة عشر ضلعا المنتظم الخمس وأما اذا وصلت نقط

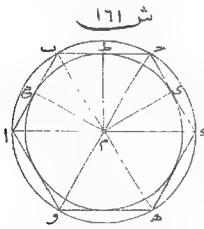
* التقاسيم اثنتي عشرة أو أربعاً وأربعاً وسبعاً وسبعاً فأتوا توصل إلى الأشكال الثلاثة المنتظمة
* النجمة ذوات الخمسة عشر ضلعاً
(١٧٢) الخط المنكسر المنتظم هو خط مضلع زواياه متساوية وأضلاعه كذلك ومثل هذه
الخطوط المنكسرة المنتظمة ليست دائماً أجزاء من أشكال منتظمة وإنما يكون لها فقط بعض
خواص الأشكال المنتظمة المحدبة

الفصل الأول

في الأشكال المنتظمة المرسومة داخل الدائرة وخارجها

دعوى نظرية

(١٧٣) كل شكل منتظم محدد يمكن أن يرسم عليه محيط دائرة واحدة فقط يمر برؤس زواياه



وواحد آخر فقط داخله ليس جميع أضلاعه (شكل ١٦١)

فإذا كان الشكل المنتظم المعلوم هو $ا ب ج د هـ$ وهو يقال

أولاً - يمر بالنقط الثلاث $ا ب ج$ محيط

دائرة يكون مركزه كما هو معلوم في تقاطع العمودين $م ع$ و

$ط م$ المقامين على وسطى $ا ب$ و $ب ج$ ثم يوصل المركز

بنقطة $د$ رأس الزاوية التي تلي زاوية $ج$ فإذا طبقنا

الشكل الرباعي $م ط ا$ على الشكل الرباعي $م ط ج$ و

بأن نجعل $م ط$ فاصلاً مشتركاً فإن نقطة $ب$ تقع

ضرورة على نقطة $ج$ وبأخذ الضلع $ا ب$ الاتجاه $ج د$ حيث أن زاوية $ب =$ زاوية $ج$

وتقع نقطة $ا$ على نقطة $د$ لأن الضلع $ا ب =$ الضلع $ج د$ ويكون $م ا = م د$ وحينئذ

فلا بد من أن محيط الدائرة الذي يمر بالنقط الثلاث $ا ب ج$ و $د$ يمر أيضاً بنقطة $د$ التالية

لها وكذلك لما كان هذا المحيط يمر بالنقط الثلاث $ا ب ج د$ و $هـ$ فلا بد له أن يمر أيضاً بنقطة $هـ$

التالية لها كما مر وهكذا وبذلك قد ثبت إمكان رسم محيط دائرة يمر برؤس الشكل المنتظم المعلوم

ويسهل البرهنة على عدم إمكان امرار محيط آخر يمر برؤس الشكل المذكور حيث أن كل ثلاث

نقط ليست على استقامة واحدة لا يمكن أن يمر بها إلا محيط دائرة واحدة

تنبيه - اذا وصل من المركز الى جميع رؤس الشكل بمستقيمت فان المثلثات الحادثة من ذلك تكون متساوية لتساوى الاضلاع الثلاثة فيها وجبئذ فالمستقيمت م ا و م ب و ... الخ تكون منصفة للزوايا ا و ب و ح و ... الخ

ثانيا - حيث كانت نقطة م موجودة على جميع المستقيمت المنصفة للزوايا ا و ب و ح و ... الخ فتكون جميع الاعمدة النازلة منها على اضلاعها مثل م ع و م ط و ... الخ متساوية وبناء عليه اذا جعلت نقطة م مركزا ونصف قطر مساو أحدها م ح ورسم محيط دائرة فانه يمر بالنقط ح و ط و ي و ... الخ ويكون مماسا للاضلاع فيها واذن فقد أمكن تمثيل دائرة داخل الشكل المفروض عس أضلاعه

وأما البرهنة على عدم إمكان امرار محيط آخر غير السابق فهي انه لو فرض إمكان امرار محيط آخر موف للشرط المتقدم يقال حيث ان مركزه لابد أن يكون على ابعاد متساوية من أضلاع الشكل المذكور فلا يكون موجودا الا في تقاطع المستقيمت المنصفة للزوايا ا و ب و ح و ... الخ وحينئذ فلا يكون خلاف نقطة م ولا يكون نصف قطر مخالف للعمود م ح وهو المطلوب

تنبيه ١ - نقطة م التي هي مركز مشترك للدائرتين المرسومين خارج الشكل وداخله تعتبر أيضا مركزا للشكل ولهذا السبب يطلق اسم الزاوية المركزية في الشكل المنتظم على الزاوية ا م ب التي رأسها بالمركز وضلعاها نصف القطرين الواصلان الى نهايت الضلع ا ب ولما كانت أضلاع الشكل كلها متساوية تكون الزوايا المركزية كذلك وحينئذ ففساد رأى واحدة منها يساوى خارج قسمة أربع قوائم على عدد أضلاع الشكل

تنبيه ٢ - حيث ان برهنة النظرية المتقدمة مؤسسة على تساوى الاضلاع المتوالية ا ب و ب ح و ح د و ... الخ وعلى تساوى الزوايا المحصورة بينها فنطبق ضرورة على الخط المنكسر المنتظم بمعنى أن كل خط منكسر منتظم يمكن أن يرسم عليه دائرة تمر برؤس زواياه وأخرى داخله عس أضلاعه

دعوى عملية

(١٧٤) اذا علم مضلع منتظم ا ب ح د هـ هـ مرسوم داخل دائرة والمطلوب رسم شكل منتظم على الدائرة مشابه للاول أى متجمعة في عدد الاضلاع (شكل ١٦٢)

طريقة ذلك أن ينزل من المركز أنصاف الاقطار م ح و م ط و م ي و ... الخ عمودية على أضلاع الشكل المعطى ثم يرسم من النقط ح و ط و ي و ... الخ مماسات لمحيط الدائرة فيتشكل بذلك المضلع المنتظم المطلوب

والبرهنة على ذلك يقال يجب أن يبرهن على أن النقط الثلاثة م و ب و د على استقامة واحدة

والوصول الى ذلك يقال

ان المثلثين القائمى الزاوية ϵ م γ و δ م γ
 فيها الوتر γ مشترك والضلع ϵ م γ = الضلع
 م γ واذا يكونان متساويين وينتج من تساويهما
 أن الزاوية المركزية ϵ م γ = الزاوية المركزية
 δ م γ وبناء عليه في المستقيم γ م δ بنقطة γ
 وسط القوس ϵ م δ وبمن هذا السبب توجد

النقط ح' و د' و هـ' ... الخ على امتداد المستقيمت م ح' و م د' و م هـ' ... الخ

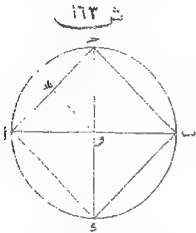
لكنه حيث كان $\hat{A} \hat{B}$ موازيا $\hat{A} \hat{B}$ و $\hat{B} \hat{C}$ موازيا $\hat{B} \hat{C}$ تكون زاوية $\hat{A} \hat{B} \hat{C} =$ زاوية $\hat{A} \hat{B} \hat{C}$ وبمثل ذلك تكون باقى زوايا الشكلين المتناظرة متساوية وبذلك يكون الشكل الخارجى متساوى الزوايا

والبرهنة على تساوي أضلاعه يؤخذ من تشابه المثلثات التي رؤسها بالمركز أن

$$\frac{1/1}{1/1} = \frac{1/2}{1/2} = \frac{2/3}{2/3} = \frac{3/4}{3/4} = \frac{4/5}{4/5} = \frac{5/6}{5/6}$$

دعوى علمية

(١٧٥) المطلوب رسم مربع داخل دائرة معلومة (شكل ١٦٣) أعنى تقسيم محيط دائرة معلومة الى أربعة أقسام متساوية

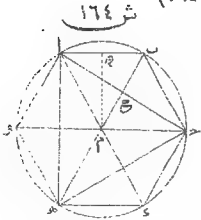


تحل هذه المسئلة مباشرة بواسطة رسم قطرين متعامدين فيه $أ ب$ و $ج د$ وبوصل قط التقاسيم المتوالية ببعضها بمستقيمات فيتشكل بذلك المربع $أ ب ج د$ (١٧٥) نتيجة ١ - اذا مضى بالحرف $أ$ ضلع المربع $أ ب$ وبالرسم $و$ لنصف قطر الدائرة $و أ$ فانه يتحصل من المثلث القائم الزاوية $أ و ج$ أن $أ ج = ج د$ أو $أ ج = ج د$ واذن فالكميتان $أ و ج$ غير متساويتين

نتيجة ٢ - اذا قسم كل جزء من أجزاء المحيط الاربعة الى قسمين متساويين ثم قسم كل قسم من هذه الاقسام الى جزئين متساويين وكل واحد من هذه الاجزاء الاخيرة الى جزئين متساويين أيضا وهكذا وفي كل مرة وصلت النقط المتوالية بمستقيمات فانه يتشكل من ذلك المثلث المنتظم المرسوم داخل الدائرة وذو الستة عشر ضلعا المنتظم وذو الاثنين وثلاثين ضلعا المنتظم وهكذا

دعوى علمية

(١٧٦) المطلوب رسم المسدس المنتظم داخل الدائرة (شكل ١٦٤)



نفرض ان المسئلة محولة وان $أ ب$ هو ضلع المسدس المطلوب أى ان القوس المقابل له هو سدس المحيط فاذا وصل نصف القطرين $م ب$ و $م أ$ فالثلث الحادث يكون متساوى الساقين وحيث كانت زاوية $أ م ب$ مساوية $\frac{1}{3}$ قاعة أو $\frac{1}{3}$ قاعة يكون مجموع الزاويتين الاخرين المتساويتين مساويا $\frac{1}{3}$ قاعة وحيث يكون مقدار كل واحد منهما مساويا $\frac{1}{3}$ قاعة ويكون الثلث

بناء عليه متساوى الاضلاع ويكون ضلعه $أ ب$ مساويا نصف القطر $م أ$ وحيث ذ فلاجل رسم المسدس المنتظم داخل الدائرة أو تقسيم محيط دائرة الى ستة أقسام متساوية يطبق نصف القطر على المحيط ست مرات كانه وتر

وحيث يكون ضلع العشر هو القسم الاكبر من تقسيم نصف القطر الى خمسة ذات وسط وطرفين
نتيجة ١ - اذا جعل س رمز النصف قطر الدائرة و د رمز الضلع العشر المنتظم المحذب
حدث

$$\frac{\text{س}}{\text{د}} = (1 - \sqrt{5})$$

نتيجة ٢ - اذا وصل بين نقط التقاسيم اثنتين اثنتين فانه يتكوّن من ذلك الخمس المنتظم المحذب
واذا قسم كل قوس من أعشار المحيط الى قسمين متساويين وكل واحد من الاقواس الجديدة الى
قسمين متساويين أيضا وهكذا ووصلت نقط التقاسيم المتوالية بستة قسيمات تكون من ذلك
الاشكال المنتظمة التي تتركب من عددا ضلعا هذا المتواليه

$$٥ \text{ و } ٢ \times ٥ \text{ و } ٢ \times ٥ \text{ و } ٢ \times ٥ \text{ و } ٥$$

* تنبيه - اذ امدد المستقيم ام على استقامته حتى يلاقى المحيط في نقطة ى فان هذه
النقطة تكون نهاية القسم الثالث من ابتداء نقطة ا عند تقسيم المحيط الى عشرة أقسام
* متساوية وعليه يكون أى هو ضلع العشر المنتظم النجمى
* وللهنه على ذلك يقال

* من المعام ان المثلث واى متساوى الساقين وان زاوية $\text{واى} = \frac{\text{س}}{\text{د}}$ قائمة فتكون
* المساوية لها كذلك ويكون مقدار زاوية اوى مساويا $\frac{\text{س}}{\text{د}}$ قائمة وهى ثلاثة أمثال
* مقدار الزاوية المقابلة لضلع العشر
* ولايجاد مقدار هذا الضلع يقال

* ان فى المثلث وىم زاوية $\text{وىم} = \frac{\text{س}}{\text{د}}$ قائمة وهى تساوى زاوية ومى واذن يكون
* $\text{وى} = \text{مى} = \text{س}$ ويكون

* $\text{اى} = \text{ام} + \text{س} = \text{اب} + \text{س} = \frac{\text{س}}{\text{د}} (1 - \sqrt{5}) + \text{س} = \frac{\text{س}}{\text{د}} (1 + \sqrt{5})$
* أعنى انه يتوصل الى ضلع العشر المنتظم النجمى بواسطة قسمة نصف القطر الى خمسة ذات وسط
* وطرفين وأخذ البعد المتقابل للعل الثانى المأخوذ على امتداد المستقيم المنقسم

دعوى نظرية

(١٧٨) ضلع الخمس المنتظم المحذب المرسوم داخل الدائرة هو وتر مثلث قائم الزاوية ضلعاها
الآخران هما نصف قطر الدائرة وتوضع العشر المنتظم المحذب المرسوم داخلها (شكل ١٦٦)

(٩) القفصه البويه (ثانى)

ليكن اب ضلع المعشر المنتظم المحدث المرسوم داخل الدائرة و فيمد على استقامته ويؤخذ عليه
 البعد $ا = اد$ أو يتم بوصل $و$ فيكون هو ضلع
 الخمس المنتظم المحدث في الدائرة التي مركزها $ا$ ونصف
 قطرها $ا = اد$ أو لان زاوية $واد = \frac{2}{5}$ قائمة
 ثم يرسم من نقطة $د$ المستقيم $دز$ مماسا لمحيط الدائرة
 ويوصل $ز$ فاذا أثبتنا ان المماس $دز$ مساو لضلع
 المعشر المنتظم المحدث اب ثبت المطلوب
 ولذلك يقال من المعلوم ان

$$دز = ا \times د$$

وحيث كان اب مساويا لضلع المعشر المنتظم فرضا و $ا$ مساويا لنصف القطر يحدث

$$ا = ا \times د$$

وحيثذا يكون $د = اب$ وهو المطلوب

نتيجة ١ - اذا رمز بالحرف $د$ لضلع المعشر وبالحرف $ع$ لضلع الخمس وبالرمز $ن$ لنصف
 القطر حدث (١٧٧ نتيجة ١)

$$ع = د + ن = \frac{ن}{٤} (١ - ٥٧) + \frac{ن}{٤} (١٠ - ٥٧٢) \text{ أو } \frac{ن}{٤} (٥٧٢ - ١٠٧) = ع$$

* نتيجة ٢ - (شكل ١٦٧) يمكن الوصول الى معرفة طول ضلعي الخمس المنتظم والمعشر

المنتظم المحدثين المرسومين داخل الدائرة بطريقة سهلة كما يأتي
 * وهو ان يرسم داخل الدائرة قطران متعامدان $اب$ و $دز$
 * ثم يرسم من نقطة $م$ وسط نصف القطر $د$ و محيط دائرة
 * بنصف قطر مساو $ام$ فيقطع المستقيم $دز$ في نقطة $هـ$
 * فيكون هو هو ضلع المعشر المنتظم و $اهـ$ هو ضلع الخمس
 * المنتظم المحدثين المرسومين داخل الدائرة وذلك لان

$$م = اهـ = م + ن = \frac{ن}{٤} + \frac{ن}{٤} (١ - ٥٧) \text{ أو } م = اهـ = \frac{ن}{٤} (٥٧٢ - ١٠٧)$$

* وحيثذا يكون

$$* وهـ = م - د = م - ن = \frac{ن}{٤} (٥٧٢ - ١٠٧) - \frac{ن}{٤} (١ - ٥٧)$$

* وهو مقدار ضلع المعشر المنتظم السابق إيجاده بفترة (١٧٧) وبناء عليه يكون أه هو ضلع الخمس المنتظم كما ذكر

* تنبيه - بعد تقسيم المحيط الى خمسة أقسام متساوية اذا وصل بين نقط التقاسيم اثنتين اثنتين فانه يشكل ضرورة الخمس المنتظم النجمي وحساب مقدار ضلعه أ (شكل ١٦٨)

* نصل القطر أب والمستقيم ب د وهو ضلع المعشر

* المنتظم المحدث بالثلث القائم الزاوية أ ب د يؤخذ منه



$$\text{ش ١٦٨} \quad \overline{أ ب} - \overline{ب د} = \overline{أ د}$$

* غير أن

$$\text{أ ب} = ٢٠ و ب د = \frac{١}{٢} (١ - ٥\sqrt{٥})$$

* فيكون

$$\overline{أ د} = \overline{أ ب} - \overline{ب د} = \frac{١}{٢} (١ - ٥\sqrt{٥}) - \frac{١}{٢} (١ - ٥\sqrt{٥}) = ٠$$

$$\overline{أ د} = \frac{١}{٢} (١٠ + ٥\sqrt{٥}) \text{ أو } \overline{أ د} = \frac{١}{٢} (١٠\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٥})$$

* ويمكن التحقق من أن الضلع أ د هو وتر لثلث قائم الزاوية ضلعه الأخران هما نصف

* القطر وضلع المعشر المنتظم النجمي

* وذلك لأن مجموع مربعي القائمتين هو (١٧٧) تنبيه

$$\overline{أ د} = \overline{أ ب} + \overline{ب د} = \frac{١}{٢} (١٠ + ٥\sqrt{٥}) + \frac{١}{٢} (١٠ + ٥\sqrt{٥})$$

* ويكون مقداره اذن مساويا الى

$$\frac{١}{٢} (١٠\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٥})$$

* وهو عين المقدار الذي سبق الحصول عليه

دعوى علمية

(١٧٩) المطلوب رسم الشكل ذي الخمسة عشر ضلعا المنتظم المحدث داخل الدائرة (شكل ١٦٩)

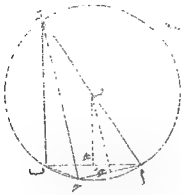
ليكن القوس أ ب مساويا سدس المحيط أى ان وتره أ ب مساويا لنصف القطر وليكن

القوس أ د مساويا لعشر المحيط أى ان وتره أ د مساويا لضلع المعشر المنتظم المحدث فيكون

القوس ب د معادلا لضرورة الى $\frac{١}{١٠} - \frac{١}{١٠} = \frac{١}{١٠} - \frac{١}{١٠} = \frac{١}{١٠}$ من محيط الدائرة

ويكون وتره ب د هو ضلع الشكل ذي الخمسة عشر ضلعا المنتظم المحدث المرسوم داخل الدائرة

* نتيجة ١ - اذا وصل القطر اذ والمستقيمان د ب و د ح ثم طبقت نظرية ثمرة (١٤٥)
* على الشكل الرباعي ا ح د ب يحدث



* $ا د \times ب د = د ب \times ا ب - د ح \times د ب$

* ويجعل س رعا الضلع الشكل ذي الخمسة عشر المنتظم يحدث

* $س = س \times \frac{١٠٧}{٥٧٢} + ٥٧٢$

* $- \frac{١}{٢} (١ - ٥٧) س - ٣٧$ أو

* $س = \frac{١}{٢} \{ ٣٧ + ١٥٧ - ٥٧٢ \}$

* نتيجة ٢ - متى قسم المحيط الى خمسة عشر جزءا متساوية ووصلت نقط التقاسيم اثنين اثنين أو أربعة أو ثمانية أو سبعا سبعا فانه يتكون من ذلك الاشكال الثلاثة المنتظمة النجمية ذوات الخمسة عشر ضلعا ويمكن حساب مقادير أضلاع كل واحد منها بواسطة خاصية الشكل الرباعي المرسوم داخل الدائرة الذي سبق استعماله غير أن هذه المقادير مرسومة ولا فائدة فيها

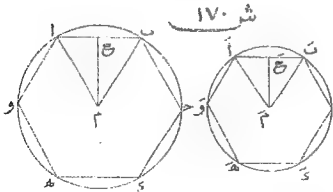
الفصل الثاني

في مقارنة المضلعات المنتظمة بعضها

دعوى نظرية

(١٨٠) النسبة بين محيطي الشكلين المنتظمين المتشابهين كالنسبة بين قطري الدائرتين المرسومتين

خارجهما أو داخلهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعات تلك الانصاف الاقطار (شكل ١٧٠)



اذا كان الشكلان المنتظمان المعلومان هما ا ب ح د ه و و ا ب ح د ه و و نصفنا قطري الدائرتين المرسومتين خارجهما هما ا م و م آ ونصفا

قطري الدائرتين المرسومتين داخلهما هما م ح و م ح يقال

أولا - حيث أن الشكلين متشابهان يحدث

$$\frac{\text{محيط } \text{أ ب ح د ه و}}{\text{محيط } \text{أ ب ح د ه و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ب}}$$

وحيث أن كل واحد من المتأين أ ب و أ م ع يشابه نظيره من المتأين أ م ب و أ م ح يحدث

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ م}} = \frac{\text{أ م}}{\text{أ م}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ م}}$$

وإذاً يكون

$$\frac{\text{محيط } \text{أ ب ح د ه و}}{\text{محيط } \text{أ ب ح د ه و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ م}} = \frac{\text{أ م}}{\text{أ م}}$$

ثانياً - ينتج من تشابه الشكلين المستطمين أن

$$\frac{\text{سطح } \text{أ ب ح د ه و}}{\text{سطح } \text{أ ب ح د ه و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ م}}$$

ومن المثلثات المتشابهة السابقة يؤخذ

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ م}} = \frac{\text{أ م}}{\text{أ م}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ م}}$$

وإذاً يكون

$$\frac{\text{سطح } \text{أ ب ح د ه و}}{\text{سطح } \text{أ ب ح د ه و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ م}} = \frac{\text{أ م}}{\text{أ م}} \text{ وهو المراد}$$

تعريف

(١٨١) الكمية المتغيرة هي التي تأخذ على أسوأ أحوال مختلفة من المقادير ونهاية أى كمية متغيرة هي كمية ثابتة تقرب منها تلك الكمية المتغيرة شيئاً فشيئاً بدون أن تبلغها

(١٨٢) يوجد في علمي الحساب والهندسة أمثال كثيرة للكميات المتغيرة والنهيات تمثل لك بأحدها فنقول

من المعلوم أن مقدار الزاوية في أى شكل منتظم غدد أضلاعه م هو $\frac{2}{3} - \frac{4}{3}$ (١٦٨)

فإذا فرض أن عدد أضلاع الشكل يأخذ في الزيادة شيئاً فشيئاً إلى غير نهاية فإنه يشاهد أن مقدار الزاوية شيئاً فشيئاً أيضاً ومتى كان m عدداً كبيراً جداً قرب الكسر $\frac{1}{m}$ قرباً كلياً من الصفر وحينئذ يقرب مقدار الزاوية قرباً كلياً من القائمتين واذن تكون نهاية مقدار رأى زاوية من الشكل المنتظم قائمتين

(١٨٣) من المعلوم أنه إذا كان للعوامل A و B و C نهايات هي A و B و C كان نهاية الحاصل $A \times B \times C$ هي $A \times B \times C$ أعني أن نهاية حاصل ضرب عدة عوامل مساوية لحاصل ضرب نهايات تلك العوامل

دعوى نظرية

(١٨٤) إذا رسم داخل دائرة وخارجها شكلان منتظمان متجانسان في عدد الأضلاع ثم ضعوا عدداً أضلاعهما إلى غير نهاية فإن محيطهما سيكون له مناهية مشتركة لا ترتبط بنفس المضعفين الأصليين ولا بالقانون الذي أتبع في تضعيف عدد الأضلاع

فإذا كان A و B و C ... الخ المضلع المنتظم المرسوم خارج الدائرة ويرمز لمحيطه بالحرف C وكان A و B و C ... الخ المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة ومحيطه C ثم فرض تقسيم كل واحد من الأقواس A و B و C و C و C ... الخ إلى أجزاء متساوية عددها n ووصلت فقط التقاسيم المتوالية ببعضها ثم رسم مماسات من منتصفات الأقواس الجديدة فإنه يتكون من ذلك كثيراً أضلاع منتظمان أحدهما يكون خارج الدائرة ويرمز لمحيطه بالحرف C وثانيهما يكون داخلها ويرمز لمحيطه بالحرف C إذا تقرره هذا يقال

أولاً - أن المحيط الجديد الخارج C أصغر من المحيط الخارج الأصلي C بخلاف المحيطين الداخليين فإن المحيط الجديد C أكبر من المحيط الأصلي C وغير ذلك فإن أي المحيطين الداخليين أصغر من أي المحيطين الخارجيين

ومن هذا يعلم أن كل واحد من المحيطين C و C يقرب من نهاية محدودة ثم إذا رسمنا بالرمز n النصف قطر الدائرة المرسومة داخل الشكل C و n النصف قطر الدائرة المرسومة داخل الشكل C تحصل على مقتضى النظرية السابقة

$$\frac{C}{n} = \frac{C}{n} = \frac{C}{n} \quad \text{أو} \quad C - C = C - C = C - C$$

فإذا فرضنا الآن أن عدد الاضلاع في كلا الشكلين أخذ في الزيادة الى غير نهاية فإن الكمية ϵ تأخذ في الصغر شيئاً فشيئاً وكذا الكمية $(\sigma - \sigma')$ فإنها تأخذ في التناقص أيضاً وتقرب قريباً كلياً من الصغر وذلك لانه حيث كانت أضلاع كل شكل حادث داخل تزيد بعداً عن المركز عن أضلاع الشكل السابق فيزيد اذن مقدار σ شيئاً فشيئاً وتكون نهاية هي σ وبناء عليه فيقرب المقدار $\epsilon - \epsilon'$ من الصغر ويكون للحيطين نهاية مشتركة نرسم لها بحرف δ ثانياً - اذا نظرنا للشكلين المنتظمين الآخرين اللذين محيطاهما ϵ و ϵ' وفرضنا تضعيف عدد أضلاعهما الى غير نهاية واتبعنا في ذلك قانوناً غير الذي اتبعناه في تضعيف عدد أضلاع الشكلين الاصليين وفرض انهما قريبان من نهاية مشتركة لهما δ فإنه يجب أن نبرهن على أن $\delta = \delta'$

ولذلك يقال حيث كانت δ هي النهاية التي يقرب منها ϵ الذي يفوق جميع المحيطات ϵ' فلا يمكن أن تكون أقل من النهاية δ' وهي نهاية المحيطات ϵ' وكذلك حيث كانت النهاية δ' نهاية للمحيطات ϵ' التي تفوق جميع المحيطات ϵ فلا يمكن أن تكون أقل من δ نهاية المحيطات ϵ واذن تكون $\delta = \delta'$

نتيجة ١ - النهاية المشتركة للحيطين ϵ و ϵ' المرسومين خارج الدائرة ودخلها هي ما نسمي بمحيط الدائرة

نتيجة ٢ - ينتج مما تقدم أن طول محيط الدائرة هو دائماً أقل من محيط أي شكل منتظم مرسوم خارجها وأكبر من محيط أي شكل منتظم مرسوم داخلها

نتيجة ٣ - يمكن تطبيق جميع البراهين التي سبق ذكرها على جزء من محيط دائرة بواسطة أن يرسم داخله وخارجها خطان منتظمان منكسران وحيث نلذ فمعتبر طول أي قوس النهاية المشتركة δ لطول خط منكسر منتظم متغير اما مرسوم داخل القوس أو خارج متى ضويف عدد أضلاعه الى غير نهاية

نتيجه - لا يمكن مقارنة طول قوس من منحني بطول خط مستقيم بل ولا يمكن أن يقال ان أحدهما أكبر من الآخر ولهذا اقد التزمنا عند مقارنته بالخط المستقيم تعديلاً بطول الخط المنحني

دعوى نظرية

(١٨٥) اذا رسم داخل الدائرة وخارجها شكلان منتظمان متحدان في عدد الاضلاع وضوفاً عدد أضلاعهما الى غير نهاية فإن سطحهما يكون لهما نهاية مشتركة هي سطح الدائرة (شكل ١٦٢)

فإذا رمزنا بالرمزين s و s' لسطحي الشكلين المرسومين خارج الدائرة ودخلها ثم قسم كل واحد من الاقواس $آآ'$ و $بب'$ و $حح'$ و ... الخ الى أقسام متساوية عددها k ووصل بين نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمات ثم رسم مماسات من نقط أواسط الاقواس الجديدة فإنه يتكوّن من ذلك شكلان منتظمان أحدهما s خارج الدائرة والثاني s' داخلها ثم اذا استمر في تقسيم الاقواس المماسية فاننا نتقل من الشكلين s و s' الى s_1 و s'_1 ومن s_1 و s'_1 الى s_2 و s'_2 وهكذا

ولما كان كل سطح من سطوح الاشكال الخارجة أكبر من سطح الدائرة لاشتماله عليه وكل سطح من سطوح الاشكال الداخلة أقل من سطح الدائرة لانحصار فيه وأنه كلما ضعف في عدد الاضلاع فان سطوح الاشكال الخارجة تتناقص وسطوح الاشكال الداخلة تتزايد فلا بد ان من أن نجزم بان السطوح s و s_1 و s_2 و s_3 و ... الخ تتقارب شيئاً فشيئاً من نهاية وكذلك السطوح s' و s'_1 و s'_2 و s'_3 و ... الخ لكنه بناء على ما تقرر بنظرية ثمرة ١٨٠ يحدث

$$\frac{s}{s'} = \frac{s_1}{s'_1} = \frac{s_2}{s'_2} = \frac{s_3}{s'_3} \text{ أو } \frac{s - s_1}{s_1 - s_2} = \frac{s_1 - s_2}{s_2 - s_3} = \frac{s_2 - s_3}{s_3 - s_4} = \dots$$

ومن ذلك يعلم انه كلما زيد في تضعيف عدد الاضلاع الى غير نهاية فان الفرق $(s - s')$ يصير كمية صغيرة جداً وبناء عليه فنهاية السطح s هي عين نهاية السطح s' ولما كان سطح الدائرة محصوراً دائماً بين هذين السطحين فيكون هو تلك النهاية المشتركة

نتيجة - لا يمكن مقارنة سطح الدائرة مباشرة بـ سطح المربع المعتبر وحده لانحناء الدائرة غير أنه بواسطة النظرية المتقدمة يتيسر لنا ذلك بان نأخذ مساحة الشكلين المذكورين ونبعث عن النهاية التي يقربان منها متى ضعف عدد أضلاعها الى غير نهاية

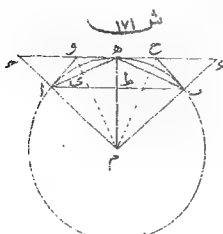
دعوى عملية

(١٨٦) اذا علم محيط شكلين منتظمين c و c' عدد أضلاع كل واحد منهما n وكان أحدهما s وسواها s' خارج الدائرة والثاني داخلها والمطوب حساب محيطي الشكلين s و s'

المنتظمين المرسومين خارج الدائرة ودخلها وعدد أضلاع كل منهما ٥٢ (شكل ١٧١)

لكن \mathcal{H}_2 و \mathcal{H}_3 ضلعين متناظرين من الشكلين

المعلومات من بحث ان



$$, \quad 57 \times 27 = 57 \times 2 = 2$$

$$b_1 \times c_2 = b_2 \times c_1 = \dots$$

فصل آھ و ہن ونرم الماسین او و ب ع
فمحدث

$$h_1 \times 21 = h_2 \times 22 = 2, \text{ and } h_1 \times 21 = h_2 \times 22 = 2$$

إذا تقر هذا يقال

أولاً - حيث كان م و منصف الزاوية حرمه يحدث

وہ = و ح غران $\frac{ع}{م} = \frac{ع}{م}$ فجدٹ

$$\frac{2r}{r+2} = \frac{2}{2} \text{ أو } \frac{70 \div 2}{2+2} = \frac{70 \div 2}{2} \text{ أو } \frac{70}{2+2} = \frac{70}{2} = \frac{70}{2}$$

ومن هذا يحدث

ثانيا - يؤخذ من المثلثين القائمى الزاوية المتساوية وهى و هـ ا ط أن

$$\frac{e}{e_1} = \frac{e_1}{e} \quad \text{أو} \quad \frac{h \times 24}{h \times 27} = \frac{h \times 24}{\cancel{h} \times 27} \quad \text{أو} \quad \frac{h}{h} = \frac{24}{27}$$

ومنه $\bar{c}_1 \bar{c}_2 = \bar{c}_2' \bar{c}_1'$ أو $\overline{c_1 c_2} = \bar{c}_1 \bar{c}_2$ وهو المطلوب

* نتيجة - الارتباطان السابقان يسهلان اذا اعتبرنا بدل المحيطين عكسيهما أعني ان

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{2}.$$

* وحينئذ اذا وضعتنا للاجل الاختصار $\frac{1}{\varepsilon} = 1, \frac{1}{\varepsilon} = 1, \frac{1}{\varepsilon} = 1, \frac{1}{\varepsilon} = 1$

* محدث

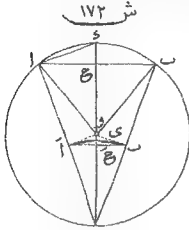
$$\overline{1}11 = 1, (1+1)\frac{1}{2} = 1 \quad \cdot \quad \cdot$$

* وتسهل البرهنة بواسطة الأعمال الحسابية على أن $| -1 | > \frac{1}{4} (1 - 1)$

(١٠) التحفة البهية (ثاني)

دعوى علمية

(١٨٧) اذا علم α و β نصفا قطري الدائرتين المرسومين خارج وداخل شكل منتظم والمطلوب إيجاد مقدارى α و β لشكل آخر منتظم متحد مع الاول فى طول المحيط ومضاعفه فى عدد الاضلاع (شكل ١٧٢)



ليكن AB ضلع المضلع المعطى و $\alpha = \angle AOB$ و $\beta = \angle A'OB'$ نصف قطر الدائرة الخارجة و $\alpha' = \angle A'O'B'$ نصف قطر الدائرة الداخلة

فبم α و β على استقامته حتى يلاقى المحيط فى نقطة D ثم نصل AD و BD وننزل على هذين الوترين العمودين AA' و BB' فالمستقيم AB' يعادل نصف AB ضرورة

وحينئذ فيكون هـ ضلع الشكل المتحد مع الاول فى طول المحيط والمضاعفه فى عدد الاضلاع وحيث ان زاوية A نصف زاوية AOB فيمكن اعتبار نقطة D مركزا لهذا الشكل الجديد ويكون $\alpha' = \angle A'O'B'$ و $\beta' = \angle A'O'B'$ اذا تقرر هذا يقال

أولا - حيث ان نقطة D كائنه فى وسط AB أى ان $\alpha' = \frac{1}{2} \alpha$ يكون

$$\alpha' = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

ثانيا - يؤخذ من المثلث القائم الزاوية AOA' ان

$$\alpha' = \alpha \times \cos \beta \quad \text{أو} \quad \alpha' = \alpha \cos \beta$$

وهو المطلوب إيجاد

نتيجة - اذا جعلت نقطة D مركزا و رسم قوس من محيط دائرة بنصف قطر مساو AD ووصل أى فيكون هذا المستقيم نصف الزاوية A ويحدث $\alpha' = \frac{\alpha}{2}$ لكنه حيث كان $\alpha' > \alpha$ أو فيكون $\alpha' > \alpha$ و أعنى ان نقطة D أكثر قربا من نقطة D عن المركز و واذن يكون

$$\alpha' > \frac{1}{2} \alpha \quad \text{أو} \quad \alpha' - \alpha > \frac{1}{2} \alpha$$

غيران المثلثين المتشابهين د ا ح و و ا ح ب يؤخذ منهما ان و ح = ح ب فيكون اذن

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$$

* تنبيه - يشاهد ان القانونين اللذين يتوصل منهما الى المقدارين ب و ب بدالة ب و ب

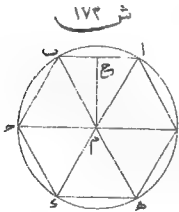
* هما عين القانونين اللذين يتوصل بهما الى ا و ا بدالة ا و ا (١٨٦)

الفصل الثالث

في قياس محيط الدائرة ومساحتها

دعوى نظرية

(١٨٨) مساحة الشكل المنتظم تساوى حاصل ضرب محيطه في ربع قطر الدائرة المرسومة داخله (شكل ١٧٣)



لانه اذا وصل من المركز م الى جميع رؤس الشكل ا ب ح د هـ و بمستقيمات م ا و م ب و م ج و م د و م هـ و م و ... الخ فإنه ينقسم الى المثلثات ا م ب و ب م ج و ج م د و د م هـ و هـ م و ... الخ المتجدة جميعها في القاعدة والارتفاع فاذا ضمت هذه المساحات على بعضها فإنه يتوصل الى المساحة المطلوبة

أعنى يكون

$$س = ا ب \times ٦ = ح ب \times ٦ = \frac{٢٢}{٣} \times ٦ = ٤٤$$

دعوى نظرية

(١٨٩) النسبة بين محيطي الدائرتين كالنسبة بين نصفي قطريهما والنسبة بين مساحتهما كالنسبة بين مربعي نصفي القطرين

أولاً - نرسم داخل الدائرتين شكلين منتظمين متحدتين في عدد الاضلاع ونرسم محيطيهما بالحرفين ح و ح ولنصفي قطري الدائرتين بالرمزين س و س فعلى مقتضى ما تقرر

بمرة (١٨٠) يحدث $\frac{س}{س} = \frac{ح}{ح}$

وحيث ان هذا التناسب حقيقى مهما كان عدد أضلاع الشكلين فانه ينطبق أيضا على محيطى الدائرتين اللتين هما نهايتان لهما ويحدث

$$(١) \quad \frac{\text{محيط س}}{\text{محيط س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

ثانيا - اذ امرض لسطحى الشكلين بالمرضين س و س تحصل أيضا بمقتضى نظرية (١٨٠) أن

$$\frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

وحيث ان هذا التناسب حقيقى مهما كان عدد أضلاع الشكلين فينطبق أيضا على سطحى الدائرتين اللتين هما نهايتان لهما ويحدث

$$\frac{\text{سطح س}}{\text{سطح س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

تنبيه - يؤخذ من الارتباط (١) أن

$$\frac{\text{محيط س}}{\text{س}} = \frac{\text{محيط س}}{\text{س}} = ط$$

أعنى أن النسبة الكائنة بين أى محيط دائرة وقطره ثابتة دائما ويرمز لها عادة بحرف ط وهو مقدار غير منطوق أى لا يمكن ايجاد مقداره الا على وجه التقريب ومعرفة النسبة ط يتوصل بها دائما الى ايجاد طول محيط دائرة نصف قطرها معلوم لانه يؤخذ من المتساوية

$$\frac{\text{محيط س}}{\text{س}} = ط \text{ ان المحيط } = ط س$$

أعنى أن طول المحيط مساو لحاصل ضرب النسبة فى القطر

دعوى نظرية

(١٩٠) مساحة الدائرة تساوى حاصل ضرب طول محيطها فى ربع قطرها

اذا رسم داخل الدائرة شكل منتظم محيطه ح ونسطحه س ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله س فان مساحته تكون مساوية الى $\frac{\text{س}}{٢} \times ح$

وحيث ان هذا القانون حقيقى . مهما كان عدد أضلاع الشكل فيكون حقيقياً أيضاً الدائرة التى هى نهاية له واذن يكون

$$\text{نهاى س} = \text{نهاى ح} \times \left(\frac{\text{نهاى ب}}{\text{نهاى ج}}\right) = \text{أوسطح الدائرة} = \text{مح} \times \frac{\text{نهاى ب}}{\text{نهاى ج}}$$

ويتوصل الى عين هذا الناتج بواسطة الشكل المرسوم خارج الدائرة
نتيجة - ينتج من هذا القانون انه لاخذ مساحة الدائرة محتاج الى معرفة طول محيطها
لكنه اذا وضع ط س بدل المحيط يحدث سطح الدائرة = ط س

دعوى نظرية

(١٩١) مساحة القطاع تساوى حاصل ضرب طول قوسه في ربع قطر دائرته
لذلك نرضى بالحرف هـ لزاوية القطاع مقدرة بالدرج فن حيث ان النسبة بين أى قطاع والدائرة
التي هو جزء منها هى عين النسبة بين قوسه ومحيطها أو بين زاويته وأربع قوائمه يحدث

$$\frac{\text{قطاع هـ}}{\text{دائرة س}} = \frac{\text{هـ}}{٣٦٠} \quad \text{أو} \quad \text{قطاع هـ} = \frac{\text{هـ}}{٣٦٠} \times \text{ط س}$$

وهذا قانون أول مساحة القطاع

لكنه للوصول الى القانون الذى يطليه المنطوق نستعرض مساحة الدائرة بمقدارها فيحدث

$$\text{قطاع هـ} = \frac{\text{هـ}}{٣٦٠} \times \text{محيط س} \times \frac{\text{نهاى ب}}{\text{نهاى ج}}$$

غير أن $\frac{\text{هـ}}{٣٦٠} \times \text{محيط س}$ هو مقدار طول القوس الذى زاويته هـ كما هو معلوم فيكون

$$\text{قطاع هـ} = \text{قوس هـ} \times \frac{\text{نهاى ب}}{\text{نهاى ج}}$$

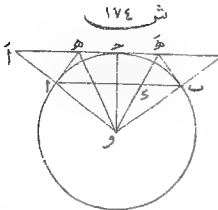
دعوى نظرية

(١٩٢) مساحة القطعة تساوى حاصل ضرب ربع قطر الدائرة فى الفرق الكائين بين قوساوين
نصف قوس ضعفه (شكل ١٧٤)

وللبرهنة على ذلك يقال من المعلوم ان القطعة أ ب عبارة عن الفرق الكائين بين القطاع
و أ ب وبين المثلث و أ ب أعني ان

$$\text{قطعة أ ب} = \text{قطاع أ ب} - \text{مثلث و أ ب}$$

غير أن مساحة القطاع تساوى حاصل ضرب قوسه في ربع قطر الدائرة وأما المثلث و اب فانه
يكن اعتبار قاعدته و ب وأما ارتفاعه فهو العمود النازل
من نقطة ا على و ب الذي هو عبارة عن نصف وتر قوس
ضعف القوس ا ح ب فاذا رمز له بالحرف ل يحدث
قطعة ا ح ب = قوس ا ح ب $\times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$
أو



قطعة ا ح ب = $\frac{1}{2}$ (قوس ا ح ب - $\frac{1}{4}$ ل)

تنبيه - مقدار طول الوتر لا يمكن تعيينه بواسطة المسطرة والبرجل الا اذا كان أحد أضلاع
شكل من الاشكال التي يمكن رسمها داخل الدائرة وفي الاحوال الاخر فانه يستعان على تعيينه
بواسطة جداول اللوغاريتمات

دعوى عملية

(١٩٣) المطلوب تعيين مقدار النسبة التقريبية ط بين محيط الدائرة وقطرها
يتوصل بالقانونين محيط س = ٢ ط س ودائرة س = ط س الى أربعة طرق مختلفة
لتعيين مقدار ط وهي

- أولاً - اذا علم طول المحيط ويطلب تعيين المقدار التقريبي لنصف القطر
- ثانياً - اذا علم نصف القطر ويطلب تعيين المقدار التقريبي لطول المحيط
- ثالثاً - اذا علم سطح الدائرة ويطلب تعيين مقدار التقريبي لنصف القطر
- رابعاً - اذا علم نصف القطر ويطلب تعيين المقدار التقريبي لسطح الدائرة

وستتكم هنا على الطريقتين الاولىين فقط تدريجاً فنقول

الطريقة الاولى المعروفة بطريقة المحيطات المتحدة في الطول

(١٩٤) اذا علم طول المحيط وكان المطلوب تعيين المقدار التقريبي لنصف القطر سه يقال

اذا كان طول المحيط مساوياً ٢ حدث ٢ = ٢ ط س ومنه سه = $\frac{1}{\pi}$
واذن فيكون مقدار نصف القطر هو عكس مقدار ط

فاذا أنشئ شكل منتظم كيفما اتفق بحيث يكون محيطه مساوياً ٢ وكان س و س نصف
قطري الدائرتين المرسومتين خارجه وداخله فان محيط الدائرة الذي نصف قطره س يكون طوله

أكبر من ٢ ضرورة كما أن محيط الدائرة الذي نصف قطره $\frac{1}{2}$ أقل من ٢ وحينئذ فيكون $\frac{1}{2}$ محصورين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$

فاذا اتقنا الآن من هذا الشكل المنتظم إلى آخر متقدمه في الطول ومضاعفه في عدد الاضلاع نجد أن $\frac{1}{2}$ محصورين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ ويمكن الاستمرار على ذلك إلى غير نهاية وحيث أنه قد شوهد بفترة (١٨٧) أن الفرق $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ يأخذ في الصغر كلما زيد في تضعيف عدد أضلاع الأشكال المتحدة في الطول ويكون نهايته الصغر وحينئذ فيمكن الوصول إلى عدد ينحصر بينهما $\frac{1}{2}$ لا يفرقان عن بعضهما إلا بمقدار يسير جدا وبذلك يتعين مقدار $\frac{1}{2}$ مع درجة التقريب المطلوبة

فاذا اعتبرنا الشكل المنتظم أنه هو المربع الذي ضلعه $\frac{1}{2}$ تحصل $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ثم إذا جعلنا هذين المقدارين مبدأ للأعمال واستخرجنا على التوالي مع التعاقب الوسط المناسب العددي والوسط المناسب الهندسي للعددين المذكورين كما ذكر بفترة (١٨٧) فانا توصل إلى المقادير

($\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$) و ($\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$) و ($\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$) و ... وهكذا

ومتى توصل إلى مقداري نصفين قطرين مثل ($\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$) مشتركين في الخانات العشرة الأولى مثلاً فإنه يمكن أخذ أحدهما أو الآخر لمقدار $\frac{1}{2}$ مقرباً بأقل من واحد من الخانة الحادية عشرة الاعشارية

ولنلاحظ الآن أنه إذا كتب العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ وأخذ الوسط المناسب العددي بينهما ثم أخذ الوسط المناسب الهندسي بين العددين الآخرين تحصل $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$

وحينئذ فيمكن إيراد هذه النظرية

نظرية - إذا كتب العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ وأخذ بدون انقطاع مع التعاقب الوسط الحسابي والهندسي للعددين الآخرين فإنه يتكوّن من ذلك سلسلة نواتج تقرب مقاديرها قرباً كلياً من $\frac{1}{2}$ ويكون هذا المقدار محصوراً دائماً بين أي ناتجين متواليين

في حساب $\frac{1}{ط}$ مقربا بأقل من $\frac{1}{١٠٠٠٠٠}$

عدد الاضلاع	س	س
٤	٠,٢٥٠٠٠٠٠	٠,٢٥٣٥٥٣٤
٨	٠,٣٠١٧٧٦٧	٠,٣٢٦٦٤٠٥
١٦	٠,٣١٤٢٠٨٦	٠,٣٢٠٣٦٤٤
٣٢	٠,٣١٧٢٨٦٥	٠,٣١٨٨٢١٨
٦٤	٠,٣١٨٠٥٤١	٠,٣١٨٤٣٧٨
١٢٨	٠,٣١٨٢٤٥٩	٠,٣١٨٣٤١٨
٢٥٦	٠,٣١٨٢٩٣٩	٠,٣١٨٣١٧٨
٥١٢	٠,٣١٨٣٠٥٩	٠,٣١٨٣١١٨
١٠٢٤	٠,٣١٨٣٠٨٩	٠,٣١٨٣١٠٣
٢٠٤٨	٠,٣١٨٣٠٩٦	٠,٣١٨٣٠٩٩
٤٠٩٦	٠,٣١٨٣٠٩٨	٠,٣١٨٣٠٩٨

تنبيهه - يجب لاجراء هذا الحساب مع السرعة والضبط

أولا - استعمال عمليات الضرب المختصرة

ثانيا - أن يتذكر عند استخراج الجذر التربيعي لاي عدد الاعتماد على أرقام اعشارية من ناتج

الجذر بقدر ما في العدد المقروض من الأرقام الحقيقية

ثالثا - أن يتذكر أن الفرق بين المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي أقل من الفرق بين

العدد من متسوما على ثمانية أمثال الاصغر وبناء عليه فيمكن استعواض المتوسط الهندسي

بالتوسط الحسابي عندما يبتكر س و س في ثلاثة أرقام اعشارية

الطريقة الثانية المعروفة بطريقة المحيطات

(١٩٥) اذا علم نصف القطر وأريد إيجاد مقدار طول محيط الدائرة التقريبي

ان افرض أن مقدار نصف القطر هو $\frac{1}{ط}$ يكون طول المحيط مساويا ط ويكون عكس طوله

هو $\frac{1}{ط}$ فإذا انشئ في هذه الحالة مربع داخل الدائرة وآخر خارجها تحصل

$$ع = ٤, ع \approx ٢٧٢ \text{ ويكون } \frac{1}{ع} = \frac{1}{٤} \text{ و } \frac{1}{ع} = \frac{1}{٤}$$

وحيث ان المحيط محصور بين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ فيكون $\frac{1}{4}$ محصورا بين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$
 فاذا ضعف عدد الاضلاع شيئا فشيئا فإنه يتوصل الى أشكال عدد أضلاعها ٨ و ١٦ و ٣٢ و
 الخ و بمقتضى ما تقر به برنر (١٨٦) يتوصل الى مقادير الكميات $(\frac{1}{2} و \frac{1}{3})$ و
 $(\frac{1}{4} و \frac{1}{5})$ و $(\frac{1}{6} و \frac{1}{7})$ وهكذا التي تقرب تدريجيا من الكمية $\frac{1}{4}$
 ونشاهد أن الأعمال الحسابية التي توصلنا اليها بهذه الطريقة مطابقة لأعمال الطريقة الاولى

تنبيه - لما كان مقدار $\frac{1}{4}$ غير منطوق قد اعتنى بعض الحسابيين الصابرين في تعيين مقدار
 عظيم جدا من أرقامه العشرية وقد علم منه الآن ٥٠٠ رقم بحيث أن

$$\frac{1}{4} = ٢٣٨٤٦ ٨٩٧٩٥ ٢٦٥٣٥ ٣١٤١٥٩ و$$

$$\frac{1}{5} = ٢٠٨٨٦١ ٩٨٨٦١ ٠٠٠٠ ٠٠٠٠ ٠٠٠٠ ٠٠٠٠ و$$

وقد بحث (ارشميدس) أقدم المؤلفين في النسبة الكائنة بين المحيط وقطره فوجد أنها محصورة بين

$$\frac{22}{7} = \frac{1}{7} ٣ = \frac{1}{7} ٣ و \frac{1}{71} ٣$$

والمقدار الاخير مقبول البساطته ويتحصل منه رقمان أعشاريان حقيقيان
 وأما (ادريان ميوس) فقد وجد هذه النسبة المقدار $\frac{٣٥٥}{١١٣}$ ويتحصل منه ستة أرقام أعشارية
 حقيقية

ومما يجعل هذا المقدار مفيدا خاصيته الموجبة لحفظه عقلا حيث انك لو كتبت على التوالي كل رقم
 من الأرقام الثلاثة الاول الفردية وهي ٥ و ٣ و ١ مرتين أحدها بجانب الآخر بأن تحصل
 ١١٣٣٥٥ فان الأرقام الثلاثة الاول من جهة الشعل تدل على القطر والثلاثة الاخر تدل على

المحيط وبمحوه الى كسر اعشاري يتحصل منه ٣١٤١٥٩٢٩

غير أن مقدار نسبة أرشميدس كاف غالباً في الأعمال

- * نتيجة - مسئله تربيع الدائرة يمكن أن يعبر عنها كما يأتي
- * المطلوب رسم مربع يكافئ دائرة معلومة بواسطة المسطرة والبرجل
- * فيشاهد على مقتضى ما تقر في النظريات المتقدمة أن ضلع المربع المجهول يكون وسطاً متناسباً
- * بين طول محيط الدائرة وربع قطرها وكان يمكن حل هذه المسئلة لو تسير بواسطة المسطرة والبرجل
- * رسم مستقيم بطول محيط الدائرة غير أن معلومية مقدار $\frac{1}{4}$ بدرجة التقرب الكافية تسمح
- * بتعديل طول المحيط مع التقرب لكنه لا يعلم الى الآن طريقة عملية لذلك ولم يقدم دليل باستحالة
- * اجراء مثل هذه الطريقة

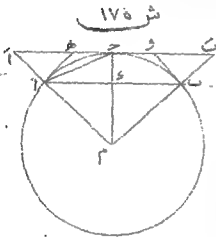
- * وعدم إمكان إيجاد المقدار الحقيقي للكسبة ط بعد كسرى ليس هو السبب في عدم الامكان
- * المطلق في تعديل محيط الدائرة حيث انه يمكن رسم المقادير ٢٧ و ٣٧ و ٥٧ و ... الخ
- * بواسطة المسطرة والبرجل مع أن ٢٧ و ٣٧ و ٥٧ و ... كيات غير منطقة

الفصل الرابع

في الدعاوى العملية المتعلقة بالمضامات المنتظمة

دعوى عملية

- * (١٩٦) اذا علم أحد أضلاع شكل منتظم مرسوم داخل دائرة والمطلوب إيجاد مقدار ضلع
- * الشكل المنتظم المشابه للأول المرسوم خارج الدائرة (شكل ١٧٥) وبالعكس
- * أولاً - اذا كان $أ = ا$ معلوما وكان المطلوب إيجاد $ا = آ$ يقال
- * يؤخذ من المثلثين $م آ ر$ و $م ا ب$ المتشابهين أن



$$\frac{م}{\frac{آ}{٢} - \frac{ا}{٢}} = \frac{٢م}{آ} = \frac{١}{ا} \quad *$$

* وحينئذ يكون

$$١ = ا = م \frac{١}{\frac{آ}{٢} - \frac{ا}{٢}} \quad \text{أو} \quad \frac{١}{\frac{آ}{٢} - \frac{ا}{٢}} = م \quad *$$

$$ا = م = \frac{\left(\frac{١}{م}\right)^2}{\frac{\left(\frac{١}{م}\right)^2}{٢} - ٤} = \frac{\left(\frac{١}{م}\right)^2}{\frac{\left(\frac{١}{م}\right)^2}{٢} - ٤} \quad *$$

- * ثانياً - اذا كان المعلوم هو $ا = آ$ والمطلوب إيجاد هو $ا = ا$ يقال
- * يؤخذ من نفس المثلثين المتشابهين أن

$$\frac{\left(\frac{١}{م}\right)^2}{\left(\frac{١}{م}\right)^2 + ٤} = ا \quad \text{أو} \quad \frac{م}{\frac{١}{٢} + \frac{ا}{٢}} = \frac{١}{ا} = \frac{١}{م} \quad *$$

- * نتيجة ١ - اذا أريد إيجاد ضلع المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم خارج الدائرة يقال
- * من المعلوم أن $ا = م = ٣٧$ وحينئذ يكون المقدار المطلوب مينا بالقانون

$$ا = م = \frac{٣٧^2}{٣ - ٤٧} = ١ \quad *$$

* أولاً - اذا كان المعلوم هو $\bar{a} = 1$, و $\bar{c} = s$ والمطلوب إيجاد h هو $h = \bar{a}$ يقال

* حيث ان المستقيم h منصف للزاوية a او h يحدث

$$\frac{1 \cdot \frac{1}{s}}{\frac{1}{2} + s + s} = \frac{1 \cdot \frac{1}{s}}{s} \quad \text{أو} \quad \frac{1 \cdot h + h}{1 + h + h} = \frac{1 \cdot h}{1} = \frac{h}{2}$$

* ومع الاختصار يحدث

$$\bar{a} = s = \frac{\left(\frac{1}{s}\right)^2}{\left(\frac{1}{s}\right) + 4 + 2}$$

* ويمكن تغيير هذا المقدار باخر يكون مقامه خالي من علامة الجذر وهو

$$\bar{a} = \bar{c} = s = \frac{2 - \sqrt{\left(\frac{1}{s}\right) + 4}}{\left(\frac{1}{s}\right)}$$

* ثانياً - اذا كان المعلوم هو \bar{a} و s والمطلوب إيجاد h يقال

* يتوصل من القوانين المتقدمة التي حلت بالنسبة الى \bar{a} أن

$$\bar{a} = s = \frac{\left(\frac{1}{s}\right)^8}{\left(\frac{1}{s}\right) - 4}$$

* نتيجة - يمكن أن يستنتج من القانون الأول غير شاعلي ما تقدم مقادير أضلاع الاشكال المنتظمة المرسومة خارج الدائرة التي عدداً أضلاعها هي

$$* \quad 8 \text{ و } 16 \text{ و } 32 \text{ و } 64 \text{ و } 128 \text{ و } 256 \text{ و } 512 \text{ و } 1024 \text{ الخ}$$

دعوى عملية

* (١٩٩) اذا علم سطحاً شاكليين منتظمين متشابهين أحدهما مرسوم خارج الدائرة والثاني

* داخلها والمطلوب إيجاد سطحي الشاكليين المنتظمين المتضاعفين للأولين في عدد الأضلاع

* والمرسوم خارج الدائرة ودخلها (شكل ١٧٥)

* ليكن a ضلع الشكل المنتظم المرسوم داخل الدائرة و \bar{a} الضلع المناظر له من الشكل

* المنتظم المرسوم خارج الدائرة عدداً أضلاع كل واحد منهما n فيكون a هو ضلع الشكل

* المضاعف الداخل و هو ضلع الشكل المضاعف الخارج ثم اذا مر من الحرفين ا و آ
* لمساحتي الشكائين المعالومين و ا و آ لمساحتي الشكائين المطاويين يحدث

$$* \quad \overline{ا} = \overline{آ} \times \overline{د} \times \overline{ا} \quad و \quad \overline{ا} = \overline{ا} \times \overline{د} \times \overline{ا} \quad و$$

$$* \quad \overline{ا} = \overline{ا} \times \overline{د} \times \overline{ا} \quad و \quad \overline{ا} = \overline{ا} \times \overline{د} \times \overline{ا}$$

* اذا تقرر هذا يقال

* أولا - يؤخذ من الثلاث م د ا و م د ا و م د ا ان

$$\frac{\overline{ا}}{\overline{ا}} = \frac{\overline{ا}}{\overline{ا}} = \frac{\overline{ا}}{\overline{ا}} = \frac{\overline{ا}}{\overline{ا}}$$

* وبناء عليه يكون

$$* \quad \overline{ا} = \overline{ا} \times \overline{د} \times \overline{ا} \quad و \quad \overline{ا} = \overline{ا} \times \overline{د} \times \overline{ا} \quad و \quad \overline{ا} = \overline{ا} \times \overline{د} \times \overline{ا}$$

* ثانيا - يحدث ايضا ان

$$* \quad \frac{\overline{ا}}{\overline{ا}} = \frac{\overline{ا}}{\overline{ا}} = \frac{\overline{ا}}{\overline{ا}} = \frac{\overline{ا}}{\overline{ا}} = \frac{\overline{ا}}{\overline{ا}}$$

* وبغير الوسيط يحدث

$$* \quad \frac{\overline{ا}}{\overline{ا} + \overline{ا}} = \frac{\overline{ا}}{\overline{ا}} = \frac{\overline{ا}}{\overline{ا}}$$

* وحينئذ يكون ايضا

$$* \quad \overline{ا} = \overline{ا} \times \overline{د} \times \overline{ا} \quad و \quad \overline{ا} = \overline{ا} \times \overline{د} \times \overline{ا}$$

* وبناء عليه يكون

$$* \quad \overline{ا} = \overline{ا}$$

* تنبيه - اذا اخذ عكس مقادير الكميات ا و آ و ا و آ فانه يتوصل الى قوانين
يقرب مقاديرها من المقادير السابق ايجادها (بمرة ١٨٧)

$$* \quad \overline{ا} \times \overline{ا} = \overline{ا} \quad و \quad \left(\overline{ا} + \overline{ا} \right) \overline{ا} = \overline{ا}$$

* نتيجة - هذه القوانين يتوصل منها الى ايجاد المقدار التقريبي للنسبة ط بطريقة جديدة

* فنفرض ان $\overline{ا} = ١$ فيكون سطح الدائرة مساويا ط ولتعيينه يقال

$$\sqrt{\frac{س + س}{س}} = \frac{\sqrt{س - س}}{\sqrt{س(س - س)}} = \frac{س}{س} \quad \text{أو} \quad \frac{س}{س} = \frac{س}{س}$$

* ومن ذلك يستتبع ان

$$\sqrt{\frac{س(س + س)}{س}} = س$$

* نتيجة - يتيسر الحصول بواسطة هذين القانونين على المقدار التقريبي للكمية ط بطريقة

* جديدة فإذا فرض ان سطح الدائرة مساو للوحدة وجعل من رمز النصف قطرها حدث

$$س = \frac{1}{ط}$$

* ولتعيين مقدار س يرسم مربع يكون مسطحه مساويا للوحدة أعني يكون ضلعه الوحدة

* أيضا فيحدث

$$س = \frac{س}{س} \quad \text{و} \quad \frac{س}{س} = \frac{1}{س}$$

* وبضعف عدد الاضلاع الى غير نهاية بدون تغيير مقادير السطوح فانا نتوصل على التوالى

* الى مقادير الكميات الآتية

$$س_1 \text{ و } س_2 \text{ و } س_3 \text{ و } س_4 \text{ و } س_5 \text{ و } س_6 \text{ و } س_7 \text{ و } س_8 \text{ و } س_9 \text{ و } س_{10} \text{ و } س_{11} \text{ و } س_{12}$$

* ومن المعلوم ان الدائرة المتحدة في المسطح مع تلك السطوح يكون نصف قطرها محصورا بين

* $س_1$ و $س_2$ وبناء عليه يكون $\frac{1}{ط}$ محصورا بين $س_1$ و $س_2$ واذن يمكن الحصول

* على مقدار هذه الكمية مع درجة التقريب الكافية

* دعوى عملية

* في تربيعة الدائرة (شكل ١٧٨)

* قد ذكرنا فيما تقدم انه لم يعلم الى الآن طريقة عملية حقيقية لتربيعة

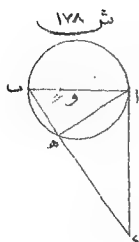
* الدائرة بواسطة المسطرة والبجل أى إيجاد طول ضلع المربع المكافئ

* لها بطرق رسمية غير أناذ كرهننا طريقتين تقرريتين لذلك فنقول

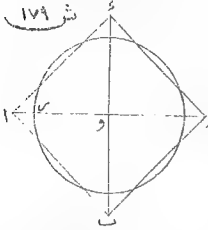
* الاولى - (شكل ١٧٨) ليكن ا ب قطر الدائرة وليكن البعد

* و ح مساويا $\frac{1}{ط}$ نصف قطر الدائرة فنمذ من نقطة ا المماس ا د

* ثم نجعل نقطة ح مركزا ويبعد مساويا ضعف القطر ا ب نرسم



* قوسان محيط دائرة يقطع المماس في نقطة د ثم يصل ب د فيقطع محيط الدائرة في نقطة هـ
 * فاذا وصل أ هـ يكون هو المقدار التقريبي لضع المربع المكافئ للدائرة وهذه الطريقة
 * المنسوبة للعلم (سويت) هي مقيدة في الاعمال فبحسب مقدار ضلع المربع المكافئ للدائرة
 * التي نصف قطرها الوحدة علم انه يساوى ١,٧٧٢٤٥٣٨ ومقدار الضلع المذكور من طريقة
 * (سويت) هو ١,٧٧٢٤٥٠٢



* الثانية - (شكل ١٧٩) يرسم قطران متعامدان
 * داخل الدائرة ويقسم أحدهما نصف الاقطار و ب مثلاً
 * الى أربعة أجزاء متساوية ثم نضم أحده هذه الأجزاء الى
 * نصف القطر و ب بحيث يكون $١ = \frac{٥}{٤} و ب$
 * ثم نرسم المربع الذي يكون فيه و أ نصف أحد قطريه
 * فيكون مكافئاً لسطح الدائرة أما مقدار ضلع المربع
 * المتحصل من هذه الطريقة فهو ١,٧٦٨٠٠٠٠ بدل المقدار ١,٧٧٢٠٠٠٠ وهذا التقريب
 * كافٍ أحياناً في الاعمال

الفصل الخامس

تمريبات

- ١ - المطلوب إيجاد مساحة المربع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ٥ أمتار وكذا المرسوم خارجها
- ٢ - اذا فرض مربعان ضلع أحدهما يساوي قطر الآخر والمطلوب معرفة النسبة بينهما
- ٣ - المطلوب إيجاد مساحة المربع الذي علم أن الفرق بين قطريه وضلعه ٦ أمتار
- ٤ - ما مقدار نصف قطر الدائرة المرسومة داخل مربع يكون الفرق بين قطريه وضلعه مساوياً ٦ أمتار
- ٥ - اذا كانت مساحة المثلث المتساوي الاضلاع تساوي ٤,٥٠ متر مربعاً والمطلوب إيجاد مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة المرسومة على المثلث
- ٦ - اذا كانت مساحة التاج المحصور بين محيطي دائرتين متحدتي المركز مساوية ٣٥,١٣٢٨ متر مربعاً وكان نصف قطر محيط الدائرة الكبرى يزيد عن نصف قطر محيط الدائرة الصغرى والمطلوب معرفة نصف قطر محيطي الدائرتين المذكورتين

(١٣) التحفة البهية (ثاني)

- ٧ - إذا اتحد محيطا دائرتين في المركز فإنه يطلب البرهنة على أن وتر المحيط الأكبر المماس للمحيط الأصغر يكون قطر الدائرة مساحتها تساوي مساحة التاج
- ٨ - إذا كانت مساحة القطاع تساوي ٢٠,٣٦٥ متر مربعاً وكان مقداره درج قوسه المعتبر قاعدة له مساوياً ١٥ ٦٥ والمطلوب معرفة طول قوسه
- ٩ - المطلوب حساب مساحة القطعة التي مقدار درج قوسها ٤٥ من دائرة نصف قطرها ٣٣
- ١٠ - إذا دل عدد ٣ أمتار على نصف قطر دائرة فامقدار نصف قطر الدائرة التي مساحتها أربعة أمثال الأولى
- ١١ - المطلوب تعيين نصف قطر الدائرة المكافئة لعدة دوائر معلومة أو للفرق بين دائرتين معلومتين
- ١٢ - المطلوب تقسيم دائرة إلى جزأين متكافئتين أو عدة أجزاء متكافئة بواسطة دائرة أو دوائر أخرى متحدة مع الأولى في المركز
- ١٣ - المطلوب تقسيم دائرة إلى جزأين متساويين لاعداد معلومة بواسطة دوائر أخرى متحدة معهما في المركز
- ١٤ - المطلوب معرفة عدد التواضع الرخام التي شكلها مسدس منتظم طول ضلعه ١٢,٠ متر لفرشها في محل مستطيل الشكل طوله ٥ أمتار وعرضه ٤ أمتار
- ١٥ - المطلوب إيجاد النسبة الكائنة بين المسدسين المنتظمين المرسوم أحدهما خارج الدائرة والثاني داخلها
- ١٦ - إذا علم ضلع المثلث المرسوم داخل الدائرة والمطلوب حساب سطح الدائرة المرسومة عليه
- ١٧ - المطلوب إيجاد النسبة بين سطح الدائرة والمثلث المتساوي الأضلاع المرسوم داخلها
- ١٨ - إذا كان مجموع مساحتي الدائرة والمثلث المتساوي الأضلاع المرسوم داخلها مساوياً ٣ أمتار مربعاً والمطلوب معرفة مساحة كل واحد منهما
- ١٩ - المطلوب إيجاد مساحة المثلث المنتظم المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ٣,٢٠ متر
- ٢٠ - إذا كانت مساحة المثلث المنتظم تساوي ٢٠ متر مربعاً والمطلوب تعيين نصف قطري الدائرتين المرسومتين داخله وخارجه

فهرسة الجزء الثانى من التحفة البهية

٣	الجزء الثانى فى مساحات كثيرى الاضلاع والخطوط المتناسبة وتشابه الاشكال والاشكال المنتظمة ومساحة الدائرة
٣	الباب الاول فى مسامح كثيرى الاضلاع والخطوط المتناسبة وتشابه الاشكال
٣	الفصل الاول فى مسامح كثيرى الاضلاع
١٧	الفصل الثانى فى الخطوط المتناسبة
٢٢	الفصل الثالث فى تشابه الاشكال
٢٣	المبحث الاول فى تشابه المثلثات
٣٠	المبحث الثانى فى تشابه كثيرى الاضلاع
٣٣	الفصل الرابع فى أوتار الدائرة وقواطعها
٣٥	الفصل الخامس فى نظريات مهمة تتعلق بالمثلثات والاشكال الرباعية التى يمكن رسمها داخل الدائرة
٤١	الفصل السادس فى الدعاوى العملية الاساسية
٥٥	الفصل السابع تمرينات
٥٨	الباب الثانى فى الاشكال المنتظمة وقياس الدائرة
٦٠	الفصل الاول فى الاشكال المنتظمة المرسومة داخل الدائرة وخارجها
٦٨	الفصل الثانى فى مقارنة المضلعات المنتظمة ببعضها
٧٥	الفصل الثالث فى قياس محيط الدائرة ومساحتها
٨٢	الفصل الرابع فى الدعاوى العملية المتعلقة بالمضلعات المنتظمة
٨٩	الفصل الخامس تمرينات

(بيان الخطأ والصواب الواقع في الجزء الثاني من التحفة البهية)

صواب	خطأ	سطر	حقيقة
بمزة ٨٠	بمزة ٨	١٤	٥
مقداراهما	مقدارهما	٢٠	٦
* ثم	ثم	٢٣	٢١
* م	م	٢٤	٢١
على عكس	عن عكس	٧	٢٢
طاليس	طسالىس	٢٣	٢٣



Universitäts- und
Landesbibliothek Bonn



0556925